Université de Saïda - Dr Moulay Tahar

Faculté des Sciences

Département[1] : *MATHEMATIQUES*[2]

Algèbre 2

(Cours Avec Exercices corrigés)

Polycopie destiné aux étudiants de première année M.I

***F**ayssal **C**harif*[3]

Date: 2021

1. Site web : https ://www.univ-saida.dz/dpt-maths/
2. E-mail : dpt-maths.sci@univ-saida.dz
3. E-mail : mat.faycal@hotmail.fr

Table des matières

Introduction

Ce manuscrit présente un cours d'algèbre 2 avec exercices corrigés. Il est destiné principalement aux étudiants de première année Mathématiques et informatique, ainsi qu'à toute personne ayant besoin d'outils d'algèbre linéaire de base.

Son contenu est axé sur les espaces vectoriels, avec un accent mis sur les espaces vectoriels de dimension finie, où l'on parle de familles génératrices et bases. Vient ensuite la partie sur les applications linéaires entre deux espaces vectoriels. Afin d'étudier d'un peu plus prés le cas des applications linéaires entre deux espaces vectoriels de dimensions finies, nous avons besoin d'introduire le calcul matriciel et les systèmes linéaires.

Chaque chapitre de ce manuscrit se termine par des exercices d'applications suivis par leurs solutions.

Nous espérons que cette modeste contribution soit utile pour le lecteur, en particulier aux étudiants de première année Mathématiques et informatique.

Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1 Espaces vectoriels sur un corps commutatif

Soit $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}})$ un corps commutatif, où $0_{\mathbb{K}}$ (resp. $1_{\mathbb{K}}$) désigne l'élément neutre par rapport à loi de composition interne $+_{\mathbb{K}}$ (resp. *l.c.i.* $\cdot_{\mathbb{K}}$).

Définition 1.1.1. *Étant donné un ensemble non vide E, on dit que $(E, +_E, \cdot_E)$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ (ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel) si :*

1. *$(E, +_E)$ est un groupe abélien.*
2. *$\cdot_E$ est une loi de composition externe (l.c.e.), (opération externe)*

$$\begin{array}{cccc} \cdot_E : & \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ & (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha \cdot_E x \end{array}$$

vérifiant (les quatre propriétés de l'opération externe) pour tous α, β dans $\mathbb{K}$ et tous x, y dans E

   (a) $\alpha \cdot_E (x +_E y) = (\alpha \cdot_E x) +_E (\alpha \cdot_E y)$;

   (b) $(\alpha +_{\mathbb{K}} \beta) \cdot_E x = (\alpha \cdot_E x) +_E (\beta \cdot_E y)$;

   (c) $(\alpha \cdot_{\mathbb{K}} \beta) \cdot_E x = \alpha \cdot_E (\beta \cdot_E x)$;

(d) $1_{\mathbb{K}} \cdot_{E} x = x$.

Les éléments de E sont appelés vecteurs, ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.
La loi de composition interne $+_{E}$ est appelée somme (addition) vectorielle, celle de la loi de composition externe $\cdot_{E}$ multiplication par un scalaire.

Remarque 1.1.1. *On note par $0 = 0_{E}$ l'élément neutre de E par rapport à l'opération $+_{E}$ et on écrira, s'il n'y a pas d'embiguité, $+$ (resp. $\cdot$) au lieu de $+_{E}$ (resp. $\cdot_{E}$), et donc on parlera du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.*

Proposition 1.1.1. *Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel on a :*

1. $\forall x \in E; \quad 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_{E}$;
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K}; \quad \alpha \cdot 0_{E} = 0_{E}$;
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E; \quad (-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot (-x)$;
4. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E; \quad \alpha \cdot x = 0_{E} \Longleftrightarrow \alpha = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $x = 0_{E}$.
5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E; (\alpha - \beta) \cdot x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x$;
6. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E; \quad \alpha \cdot (x - y) = \alpha \cdot x - \alpha \cdot y$;

Démonstration. 1- Montrons que $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$, soit $x \in E$, $0_{\mathbb{K}}.x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}).x$ ce qui implique que $0_{\mathbb{K}}.x = 0_{\mathbb{K}}.x + 0_{\mathbb{K}}.x$, donc $0_{\mathbb{K}}.x = 0_{\mathbb{K}}.x - 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$.
2- Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha.0_E = \alpha.0_{\mathbb{K}}.0_E$ (d'après 1) ce qui implique que $\alpha.0_E = (\alpha.0_{\mathbb{K}}).0_E = 0_{\mathbb{K}}.0_E$, d'où $\alpha.0_E = 0_E$.
3- D'après 1 on a $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_{E}$, donc $(\alpha + (-\alpha)).x = 0_E$, ce qui implique que $\alpha.x + (-\alpha).x = 0_E$, d'où $(-\alpha).x = -(\alpha.x)$, et d'après 2 on a $\alpha \cdot 0_{E} = 0_{E}$, donc $\alpha(x + (-x)) = 0_E$, ce qui implique que $\alpha.x + \alpha.(-x) = 0_E$, d'où $\alpha(-x) = -(\alpha.x)$.
4-" $\Leftarrow$ " évident d'après 1 et 2 .
" $\Rightarrow$ " Montrons par l'absurde l'implication $\alpha \cdot x = 0_{E} \Rightarrow \alpha = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $x = 0_{E}$, donc supposons $\alpha \cdot x = 0_{E}$ est vrai et ($\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$ et $x \neq 0_E$), si $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$ alors il existe α^{-1}, on

a $\alpha.x = 0_E$, en multipliant par α^{-1} on obtient :

$$\alpha^{-1}.(\alpha.x) = (\alpha^{-1}.\alpha).x = 1_{\mathbb{K}}.x = x \tag{1.1}$$

$$\alpha^{-1}.(\alpha.x) = (\alpha^{-1})0_E = 0_E \tag{1.2}$$

D'après(1.1) et (1.2) on a $x = 0_E$, ce qui contredit notre hypothèse.

5- Soit $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E$, on a $(\alpha - \beta) \cdot x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x$ car dans le groupe additif E, cette égalité équivaut à $(\alpha - \beta) \cdot x + \beta.x = \alpha.x$, or 1^{er} membre vaut $[(\alpha - \beta) + \beta].x$ soit $\alpha.x$.

6- De même, $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E; \alpha \cdot (x - y) = \alpha \cdot x - \alpha \cdot y$ puisque c'est équivalent à $\alpha(x - y) + \alpha.y = \alpha.x$, ce qui est vrai, le premier membre valant $\alpha[(x - y) + y] = \alpha.x$.

$\square$

Exemples 1.1.1. *1. L'espace vectoriel trivial est l'espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ comportant un unique élément, qui est nécessairement le vecteur nul.*

2. Tout corps $\mathbb{K}$ se présente comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'addition et la multiplication de $\mathbb{K}$ fournissent respectivement la somme vectorielle et la multiplication par un scalaire.

3. Plus généralement, l'ensemble des n-uplets d'éléments de $\mathbb{K}$ muni des lois usuelles, forme l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

4. L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients de $\mathbb{K}$ forment l'espace $M_{m,n}(\mathbb{K})$.

5. L'ensemble $\mathcal{C}^0(X)$ des fonctions continues réelles (resp- complexe) définies sur espace topologique X est un espace vectoriel réel (resp- complexe).

6. L'ensemble des suites numériques satisfaisant une relation de récurrence linéaire est un espace vectoriel réel.

1.1.1 Combinaisons linéaires

Définition 1.1.2. *Soient E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel et I un ensemble fini ou infini, on note par $(v_i)_{i\in I}$ la famille de vecteur indexée par I et définie par l'application*

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & v_i. \end{array}$$

La famille est appelée finie (resp infinie) si I est fini (resp infini).
Si $J \subset I$ alors $(v_j)_{j\in J}$ est une sous-famille de $(v_i)_{i\in I}$, ou on dit que $(v_i)_{i\in I}$ une sur-famille de $(v_j)_{j\in J}$.

Remarque 1.1.2. *Pour le cas où $I \subset \mathbb{N}^*$ la famille $(v_i)_{i\in I}$ notée aussi $(v_i)_{1\leq i\leq max(I)}$, dans ce cas $(v_i)_{1\leq i\leq max(I)}$ représente $max(I)$-uplet$(v_1, v_2, ..., v_{max(I)})$.*
Si $I = \mathbb{N}$, donc $(v_i)_{i\in I}$ est une suite

Combinaison linéaire d'une famille

Définition 1.1.3. *Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que le vecteur x de E est une combinaison linéaire d'élément de A s'il existe des scalaires α_i, $i \in I$ (fini) tel que $x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i$ où $x_i \in A$.*
Les scalaire α_i sont appelés coefficients de la combinaison linéaire.

Lorsque l'ensemble d'indexation I est infini, il est nécessaire de supposer que la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ est à support fini, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un ensemble fini d'indices i pour lesquels α_i est non nul.

Exemples 1.1.2. *Tout vecteur $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{k}$ est combinaison linéaire de la famille finie $F = (e_i)_{1\leq i\leq 2}$ où $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$, car $x = (x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2) = x_1(1, 0) + x_2(0, 1) = x_1e_1 + x_2e_2$.*

Remarque 1.1.3. *L'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A est le sous-espace vectoriel engendré par A.*

Exemples 1.1.3. *Voici quelque exemple*
1. Dans $\mathbb{R}$, $\langle\{1\}\rangle = \mathbb{R}\cdot 1 = \mathbb{R}$ *et* $\langle\{0\}\rangle = \{0\}$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, *si* $A = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ *alors* $\langle A\rangle = \mathbb{R}\times\{0\}$.

1.1.2 Sous-espaces vectoriels

Un sous-espace vectoriel (s-e.v.) F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une partie non vide $F \subset E$ qui est un espace vectoriel pour les restrictions à F des lois de E. En particulier, cette partie doit être un sous-groupe de $(E, +)$ et stable pour la multiplication par un scalaire, et cela suffit. Autrement dit, on a :

Définition 1.1.4. *Soit* $(E, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. On dit qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si*

1. $F \neq \emptyset$
2. *F est stable pour la loi* $+$: $\forall x, y \in F; x + y \in F$
3. *F est stable pour la loi* $\cdot$: $\forall x \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K}; \alpha \cdot x \in F$

Ceci est encore équivalent à :

1. $F \neq \emptyset$
2. $\forall x, y \in F$ *et* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}; \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F$.

De la définition précédente, on conclut que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ alors 0_E est dans F. En utilisant la contraposée de cette implication cela nous donne une condition nécessaire mais pas suffisante pour qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$. C'est-à-dire :

$$0_E \notin F \Longrightarrow F\ n'est\ pas\ un\ sous-espace\ vectoriel\ de\ E$$

Exemples 1.1.4. *1. $\{0_{_E}\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.*
2. L'ensemble des fonctions numériques à variable réelle paires est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions à variable réelle.

Remarque 1.1.4. *En pratique, on ne montrera pratiquement jamais qu'un ensemble est un espace vectoriel en utilisant la définition ; on montrera le plus souvent que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel déjà connu (comme $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}[X], \cdots$). Par conséquent, on n'utilisera rarement la définition d'un espace vectoriel donnée en début de chapitre. En revanche, il est indispensable de savoir prouver qu'un certain ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.*

Proposition 1.1.2. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou infinie) de sous-espaces vectoriels de E. L'ensemble $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel.*

Démonstration. Puisque 0_E appartient à chaque des sous-espaces vectoriels F_i, $i \in I$, il appartient aussi à leur intersection, ce qui prouve que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est non vide. Si x et y sont deux vecteurs de $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ alors pour tout $i \in I$, x et y appartiennent à F_i, et donc pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, le vecteur $\alpha x + \beta y$ appartient aussi à F_i (puisque F_i est un sous-espace vectoriel de E pour tout $i \in I$). Le vecteur $\alpha x + \beta y$ appartient donc à $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$. □

Remarque 1.1.5. ***Attention :*** *Contrairement à l'intersection, l'union d'une famille (finie ou infinie) des sous-espaces vectoriels de E n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel de E. A titre d'exemple, considérons les deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de $\mathbb{R}^2$ définis par*

$$F_1 = \mathbb{R} \times \{0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$F_2 = \{0\} \times \mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

L'ensemble $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ puisque
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in F_1$ *et* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in F_2$ *mais* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin F_1 \cup F_2$.

1.1.3 Sous-espaces vectoriels engendrés par une partie

On rappelle que la réunion de sous-espaces vectoriels n'est généralement pas un sous-espace, par contre l'intersection d'une famille non vide de sous-espaces vectoriels, est un sous-espace vectoriel. Il en résulte donc que la famille (non vide) des sous-espaces vectoriels contenant une partie A d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E possède un plus petit élément (au sens de l'inclusion). Cela permet d'introduire la définition suivante :

Définition 1.1.5. *Soit A une partie quelconque d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Le sous-espace vectoriel engendré par A est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A. c'est également l'intersection de tous les sous-espaces contenant A. on le note $vect(A)$ ou $\langle A \rangle$, c'est-à-dire*

$$\langle A \rangle = \bigcap_{A \subset F_i} F_i \ tq. \ F_i \ est \ un \ sous-espace \ vectoriel \ de \ E$$

Exemples 1.1.5. *1. Le sous-espace vectoriel engendré par $\emptyset$ (l'ensemble vide) est le sous-espace vectoriel nul, c'est-à-dire $\langle \emptyset \rangle = \{0_E\}$.*
2. Si F est sous-espace vectoriel alors le sous-espace vectoriel engendré par F est F lui même, c'est-à-dire $\langle F \rangle = F$.

1.1.4 Familles libres, familles génératrices et bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 1.1.6. *La famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$, tel que I est fini, de E est dite libre, si la seule combinaison linéaire des x_i égale au vecteur nul est celle dont tous les coefficients* *sont nuls. C'est-à-dire*

$$\forall (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K},\ \sum_{i\in I} \alpha_i x_i = 0_{_E} \implies \alpha_i = 0_{_\mathbb{K}}$$

On dit également que les vecteurs de cette famille sont linéairement indépendants.

Définition 1.1.7. *La famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$, tel que I est fini, de E est dite liée si elle n'est pas libre. Autrement dit, s'il existe une combinaison linéaire des x_i égale au vecteur nul dont des coefficients ne sont pas tous nuls. C'est-à-dire*

$$\exists\ (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K},\ \sum_{i\in I} \alpha_i x_i = 0_{_E}\ et\ \alpha_i \neq 0_{_\mathbb{K}}$$

Dans ce cas, On dit que les vecteurs de cette famille sont liés ou linéairement dépendants.

Définition 1.1.8. *La famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$, tel que I est fini, de E est dite génératrice de E, si le sous-espace vectoriel engendré par la partie $\{x_i\}_{i\in I}$ est E. C'est-à-dire*

$$\forall\ x \in E,\ \exists\ (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}\ tq.\ x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i$$

Définition 1.1.9. *On appelle base de E, toute famille de vecteurs $\{x_i\}_{i\in I}$, I est fini, de E qui est à la fois libre et génératrice de E.*

Propriétés et résultats

1. Une sous-famille d'une famille libre est une famille libre.
2. Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.
3. Une famille contenant le vecteur nul est liée.
4. Une famille réduite à un élément x est libre si et seulement si x n'est pas nul.
5. Une famille finie $\{x_i\}_{i\in I}$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est liée si et seulement si l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des autres.

Exemples 1.1.6. *1. Soit $x \in E$, alors la famille $\{x, -x\}$ est liée.*
2. La famille $\{1, \sqrt{2}\}$ du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ est libre.
3. La famille réduite à $\{1_{\mathbb{K}}\}$ est une base de $\mathbb{K}$ (en tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel).

Caractérisation d'une base :

La famille $\{x_i\}_{i\in I}$, I est fini, des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une base de E si et seulement si tout vecteur x de E s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire de ces vecteurs. C'est-à-dire

$$\forall\, x \in E,\ \exists\,!\ (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}\ tq.\ x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i$$

1.1.5 Coordonnées d'un vecteur suivant une base

Définition 1.1.10. *Soient $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$ une base de E et x un vecteur de E. Les scalaires uniques $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ vérifiant $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$ sont appelés coordonnées de x suivant la base $\mathcal{B}$, et on écrit $x = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}$.*

Exemples 1.1.7. *1. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ est une base, où*

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\ et\ b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit le vecteur $x = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$. On sait que les composantes du vecteur x sont respectivement $-1, -6$ et 1, alors que ses coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}$ sont données par $(1, 2, -3)_{\mathcal{B}}$.
2. Dans $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inferieur ou égal à 2,

la famille $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ est une base, où

$$b_1 = 2,\ b_2 = 2X - 1 \text{ et } b_3 = X^2 - 2$$

Soit le vecteur $P = 9X^2 + 4X - 6$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Les coefficients du vecteur P sont respectivement $-6,\ 4,$ et 9, mais ses coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}$ sont données par $(1, 2, 3)_{\mathcal{B}}$.

1.2 Base Canonique d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Une base canonique d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel est une base qui se présente de manière naturelle d'après la manière dont l'espace vectoriel est présenté. C'est ainsi que l'on parle de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, de la base canonique de l'espace vectoriel des matrices ou de celui des polynômes. La propriété spécifique de ces bases canoniques est que pour tout vecteur x de l'espace, les coordonnées de x dans la base canonique sont données par les composantes mêmes (coefficients) qui constituent x.

Définition 1.2.1. *Soit $\mathcal{E} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que $\mathcal{E}$ est la base canonique de E si pour tout vecteur x de E, les coordonnées de x suivant cette base sont données par les composantes mêmes (coefficients) qui constituent x.*

Exemples 1.2.1. *Dans les exemples suivants, nous allons généraliser ce qu'on a fait précédemment, cependant nous changeons les bases.*
1. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base, où

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Dans $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, *la famille* $\mathcal{E} = \{P_0, P_1, P_2\}$ *est une base où*

$$P_0 = 1,\ P_1 = x \text{ et } P_2 = x^2$$

Dans ces exemples, les coordonnées d'un vecteur quelconque de ces espaces suivant les bases données sont données par les composantes mêmes (coefficients) qui constituent ce vecteur. Cela signifie que ces bases sont les bases canoniques de ces espaces.

Remarque 1.2.1. *En algèbre, dans un espace vectoriel E ; les coordonnées d'un vecteur x de E ne sont pas, en général, les composantes de ce vecteur sauf si la base dans la quelle on a travaillé est canonique. Dans ce cas les deux notions coïncident.*

Attention : Il ne faut pas oublier qu'une base est avant tout une famille. L'ordre des éléments y a donc par conséquent une importance puisque changer l'ordre des éléments d'une base revient à changer de base. Par exemple, si $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors $\mathcal{B}' = \{b_1, b_2, b_4, b_3\}$ et $\mathcal{B}'' = \{b_2, b_1, b_4, b_3\}$ sont aussi des base de E.

1.3 Théorie de la dimension dans un espace vectoriel de dimension finie

Soit $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}})$ un corps commutatif, où $0_{\mathbb{K}}$(resp.$1_{\mathbb{K}}$) désigne l'élément neutre par rapport à l.c.i $+_{\mathbb{K}}$(resp.l.c.i. $\cdot_{\mathbb{K}}$).

Définition 1.3.1. *On dit qu'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une famille finie génératrice.*

Exemple 1.3.1. $\mathbb{K}^n$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. Soit* $e_i = (\delta_{i1}, \cdots, \delta_{in})^t$ *où* δ_{ij} *donné par* $\delta_{ij} = \begin{cases} 1_{\mathbb{K}} & si \quad i = j \\ 0_{\mathbb{K}} & si \quad i \neq j \end{cases}$ *, et est appelé symbole de Kronecker. La famille* *finie* $\{e_1, \cdots, e_n\}$ *engendre* $\mathbb{K}^n$.

1.3.1 Dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 1.3.2. *On appelle dimension de E sur* $\mathbb{K}$ *le nombre de vecteurs d'une base de E. Ce nombre est noté* $dim_{\mathbb{K}}E$ *(ou dim E s'il n'y a pas un risque de confusion).*

La dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie est dépend du corps $\mathbb{K}$ sur lequel on a défini l'espace vectoriel. Par convention $dim_{\mathbb{K}}\{0\} = 0$.

Exemples 1.3.1.

$$dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3 = 3, \;\; dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}^n = n, \;\; dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1 \;\; dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$$

Remarque 1.3.1. *Tout espace vectoriel E de dimension finie , non réduit au singleton* $\{0\}$ *admet une base finie. De plus, si E possède deux bases différentes alors, ils ont le même cardinal.*

1.3.2 Propriétés et résultas

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nul n. On peut montrer les proprétés et les résultats suivants :

1. Toute famille de vecteurs $\{x_1, \cdots, x_k\}$ avec $k > n$ est liée.
2. Toute famille libre de n vecteurs est une base (famille libre maximale).
3. Toute famille génératrice de n vecteurs est une base (génératrice minimale).
4. Toute famille de moins de n vecteurs ne peut être génératrice.
5. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $dim\ F \leq \ dim\ E$; $dim\ F = \ dim\ E$ si et seulement si $F = E$.

1.3.3 Théorème de la base incomplète

Théorème 1.3.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit au singleton $\{0\}$, $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E et $\mathfrak{L}$ une famille libre contenue dans $\mathcal{G}$. Alors, il existe une base finie $\mathcal{B}$ de E dont l'ensemble des éléments contient $\mathfrak{L}$ et est contenu dans $\mathcal{G}$. Par abus d'écriture, on note $\mathfrak{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.*

Démonstration. Le théorème précédent peut être interprété comme suit : Toute famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie peut être complétée de manière à former une base.
Si $\mathfrak{L}$ engendre le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors $\mathfrak{L}$ contient d'ores et déjà une base de E. On supposera donc que $\mathfrak{L}$ n'engendre pas E. Puisque l'espace vectoriel E est de dimension finie, la famille $\mathcal{G} = (g_1, \cdots, g_n)$ est finie. Du moment que $\mathfrak{L}$ n'engendre pas E ($E = \langle \mathcal{G} \rangle \neq \langle \mathfrak{L} \rangle$), il y a au moins un vecteur g_{i_1} de $\mathcal{G}$ qui n'est pas une combinaison linéaire de $\mathfrak{L}$. Donc, par construction, la famille $\mathfrak{L}^1 = \{l_1, \cdots, l_p, g_{i_1}\}$ est libre.
Si la famille $\mathfrak{L}^1 = \{l_1, \cdots, l_p, g_{i_1}\}$ engendre l'espace vectoriel E ($\langle \mathfrak{L}^1 \rangle = E$), la démonstration est terminée. Sinon, le même raisonnement que précédament nous assure l'existence de g_{i_2} de $\mathcal{G}$ tel que la famille $\mathfrak{L}^2 = \{l_1, \cdots, l_p, g_{i_1}, g_{i_2}\}$ est libre. Si cette famille, $\mathfrak{L}^2$, n'engendre pas E, le procédé d'extraction des vecteurs de $\mathcal{G}$ se poursuit. L'orsqu'il s'arrête, nous aurons complété $\mathfrak{L}$ en une famille libre engendrant E, c'est-à-dire en une base de E. □

Corollaire 1.3.1. *Si E est de dimension m, on complète $\mathfrak{L}$ par $m - p$ éléments de G pour obtenir une base de E.*

1.4 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 1.4.1. *Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. La somme de E_1 et E_2, noté $E_1 + E_2$, est définie par*

$$E_1 + E_2 = \{x \in E \,/\, \exists\, x_1 \in E_1 \text{ et } \exists\, x_2 \in E_2\,;\, x = x_1 + x_2\}$$

Il est clair que $E_1 + E_2$ est un sous-espace vectoriel de E contenant $E_1 \cup E_2$. En fait, la réunion des familles génératrices de E_1 et E_2 est une famille génératice pour $E_1 + E_2$.

Exemples 1.4.1. *1. $\mathbb{R}^2 = E_1 + E_2$ où $E_1 = \{0\} \times \mathbb{R}$ et $E_2 = \mathbb{R} \times \{0\}$.*
2. L'espace vectoriel, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ est la somme de $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ où $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel des fonction pairs et $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel des fonction impairs.

Sommes directes des sous-espaces vectoriels

Définition 1.4.2. *Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que la somme $E_1 + E_2$ est directe, si tout élément x de $E_1 + E_2$ s'écrit de manière unique sous la forme $x_1 + x_2$, où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. C'est-à-dire*

$$\forall x \in E_1 + E_2,\ \exists!\, x_1 \in E_1 \text{ et } \exists!\, x_2 \in E_2 \,/\, x = x_1 + x_2$$

On la note $E_1 \oplus E_2$.

Proposition 1.4.1. *Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On a l'équivalence suivantes*

$$E = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow (E = E_1 + E_2 \text{ et } E_1 \cap E_2 = \{0_E\})$$

Exemples 1.4.2. *Dans les exemples cités dans l'exemple 1.4.1, les sommes sont directes.*

On peut généraliser la somme directe de deux sous-espaces à la somme directe de n sous-espaces vectoriels. En fait, soient $E_1,\ E_2, \cdots,\ E_n$ n sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Pour que la somme $E_1 +\ E_2 + \cdots +\ E_n$ soit directe, il faut et il suffit que pour tout indice i, $E_i \cap_{i \neq j} E_j = \{0_E\}$.

Définition 1.4.3. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $E_1,\ E_2$ deux sous-espaces de E. On dit que E_1 et E_2 sont supplémentaire si $E = E_1 \oplus E_2$.*

Exemples 1.4.3. *1. Les sous-espaces vectoriels cités dans l'exemple 1.4.1 sont supplémentaires.*
2. Tous nombre complexe z du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, s'écrit de manière unique sous la forme $z = x \cdot 1 + y \cdot i$, où x et y sont des nombres réels. Donc les sous-espaces engendrés par les nombres complexes 1 et i sont supplémentaires dans $\mathbb{C}$.

Proposition 1.4.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n.*

1. *Tout sous-espace vectoriel E_1 de E admet au moins un sous-espace vectoriel supplémentaire E_2.*
2. *Si E_1 est de dimension p, alors E_2 est de dimension $n - p$.*

Démonstration. La démonstration est une application directe du théorème 1.3.1 et du corollaire 1.3.1. □

Proposition 1.4.3. *Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension quelconque. On a*

1. *$dim(E_1 \oplus E_2) = dimE_1 + dimE_2$.*
2. *$dim(E_1 + E_2) = dimE_1 + dimE_2 - dim(E_1 \cap E_2)$.*

Démonstration. Pour 1. Notons $n_1 = dim\ E_1$ et $n_2 = dim\ E_2$. Soient $\mathcal{B}_{E_1} = \{b_{11}, \cdots, b_{1n_1}\}$ base de E_1 et $\mathcal{B}_{E_2} = \{b_{21}, \cdots, b_{2n_2}\}$ base de E_2. Puisque E_1 et E_2 sont supplémentaires dans $E_1 \oplus E_2$,

$$\forall\ x \in E_1 \oplus E_2\ \ \exists!\ x_1 \in E_1\ \ \exists!\ x_2 \in E_2\ \ ;\ x = x_1 + x_2$$

Les vecteurs x_1 et x_2 appartenant respectivement à E_1 et à E_2,

$$\exists!\ (\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1n_1}) \in \mathbb{K}^{n_1}\ ;\ x_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{1i} b_{1i}$$

$$\exists!\ (\alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2n_2}) \in \mathbb{K}^{n_2}\ ;\ x_2 = \sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{2j} b_{2j}$$

On obtient ainsi pour tout vecteur $x \in E_1 \oplus E_2$ l'existence et l'unicité d'un $(n_1 + n_2)$-uplet $(\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1n_1}, \alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2n_2}) \in \mathbb{K}^{n_1+n_2}$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{1i} b_{1i} + \sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{2j} b_{2j}$$

On en déduit alors, d'après la caractérisation d'une base, que la réunion des deux familles $\mathcal{B}_{E_1}$ et $\mathcal{B}_{E_1}$ constitue une base de l'espace vectoriel $E_1 \oplus E_2$, et donc $dim(E_1 \oplus E_2) = dimE_1 + dimE_2$.
Pour 2. Choisissons un supplémentaire $E_2^{'}$ de $E_1 \cap E_2$ dans E_2. La somme de E_1 et $E_2^{'}$ est directe, car $E_2^{'} \cap E_1 = \{0\}$ donc $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2^{'}$.
Or $dimE_2^{'} = dimE_2 - dim(E_1 \cap E_2)$ d'où

$$\begin{aligned} dim(E_1 + E_2) &= dimE_1 + dimE_2^{'} \\ &= dimE_1 + dimE_2 - dim(E_1 \cap E_2). \end{aligned}$$

□

1.5 Exercices

Exercice 1 : Sur $E = \mathbb{R}_+^*$, on définit les deux lois suivantes : pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$x \oplus y = xy \quad et \quad \lambda \otimes x = x^\lambda.$$

Montrer que $(E, \oplus, \otimes)$ est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.

Exercice 2 : Soit $(E, +, *)$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition usuelle

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

et de la multiplication externe par les complexes définie par :

$$(a + ib) * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.x - b.y \\ a.y + b.x \end{pmatrix}$$

Montrer que $E \times E$ est alors un $\mathbb{C}-$espace vectoriel. Celui-ci est appelé complexifié de E, on le note $E_{\mathbb{C}}$.

Exercice 3 : Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On note 0_E l'élément neutre de $(E, +)$ et $0_{\mathbb{K}}$ l'élément neutre de $(\mathbb{K}, +)$. Pour tout x dans E, le symétrique de x est noté $-x$.

On note que, pour tout $x \in E, 2x = x + x$.

1. Montrer que, pour tout $x \in E, 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$.
2. Montrer que, pour tout $x \in E, (-1_{\mathbb{K}}).x = -x$.

Exercice 4 : Soit $E = \mathbb{R}[X]$ (l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ à une seule indéterminée) et $F = \{P \in E, P = XP' + a, a \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 5 : Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par $P(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions paires et par $I(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions impaires.

1. Montrer que $P(\mathbb{R})$ et $I(\mathbb{R})$ sont des sous espaces vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
2. Démontrez que $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = P(\mathbb{R}) \oplus I(\mathbb{R})$.

3. Quelle est la décomposition de la fonction exponentielle ?

Exercice 6 : Dans chacun des cas suivants, montrer que les sous-ensembles F, G et H sont des s.e.v de $\mathbb{R}^3$, en donnant une base et en déduire la dimension :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + z = y - z = 0 \right\}, G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x - y - 2z = 0 \right\},$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0, x - 2y = 0 \right\}.$$

Exercice 7 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on considère les s-e.v. suivants :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \right\}, G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x = y = z \right\},$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x = y = 0 \right\}.$$

1. Trouver une base de chacun de ces s-e.v et donner sa dimension.
2. A-t-on $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$? A-t-on $\mathbb{R}^3 = F \oplus H$? Que peut-on déduire ?

Exercice 8 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, les s.e.v suivants :

$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}, G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} / y, z \in \mathbb{R} \right\}$, Préciser leurs bases et leurs dimensions. Sont-ils en supplémentaires ?

Exercice 9 : Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / \tilde{P}(1) = 0\}$. Où $\tilde{P}$ est la fonction polynomiale associée à P

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner une base de E, en déduire sa dimension.

Exercice 10 : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension 4 et $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ une base de E.
Soient $u_1 = e_1 + e_2 - e_3 + e_4$ et $u_2 = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$.
On note $F = Vect(\{u_1, u_2\})$ et $G = Vect(\{e_1, e_2\})$.

1. Montrer que la partie $\{u_1, u_2\}$ est libre. Que peut-on déduire.
2. Donner un système d'équation de F relativement à la base B.
3. Préciser une base de G. Calculer $F \cap G$, en déduire que $E = F \oplus G$.

Exercice 11 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ on considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les coordonnées de e_1, e_2 et e_3 dans cette nouvelle base.

Exercice 12 :

1. Montrer que la famille $B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver les coordonnées du vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans cette nouvelle base.

2. Montrer que la famille $B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   Trouver les coordonnées des vecteurs e_1, e_2, e_3 et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 13 : Soit $P_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2), P_1 = -X(X-2), P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que $\{P_0, P_1, P_2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Exprimer P dans la base $\{P_0, P_1, P_2\}$.
3. Soit $Q = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Exprimer Q dans la base $\{1, X, X^2\}$.

Exercices supplémentaires

Exercice 14 :

1. Sur $E = \mathbb{R}^2$, on définit les deux lois suivantes : pour tous $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} \quad et \quad \lambda * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Le triplet $(E, +, *)$ est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

2. Sur $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on définit les deux lois suivantes : pour tous

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' \\ y+y' \end{pmatrix} \quad et \quad \lambda * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{\lambda} \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

Le triplet $(E, +, *)$ est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Exercice 15 : Soient F et G des sous espaces vectoriels de E.
Montrer que : $F + G = F \cap G \Leftrightarrow F = G$.

Exercice 16 : Dans chacun des cas suivants, montrer que le sous-ensemble F n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + z = 1 \right\}, F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0 \right\}$$

$$F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x^2 - z^2 = 0 \right\}, F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / z(x^2 + y^2) = 0 \right\}$$

Exercice 17 : Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ (l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à 3 de coefficient dans $\mathbb{R}$ à indéterminée X) et $F = \{P \in E, \tilde{P}(0) = 0 \quad et \quad \int_0^1 \tilde{P}(t)dt = 0\}$.

-Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donnant une famille génératrice.

Exercice 18 : Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / \tilde{P}(-1) = \tilde{P}(1) = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$. Donner une base de E, en déduire sa dimension.

1.6 Solutions

Exercice 1 : Soit $E = \mathbb{R}_+^*$, et pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$x \oplus y = xy \quad et \quad \lambda \otimes x = x^\lambda.$$

Montrons que $(E, \oplus, \otimes)$ est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.

1. Vérifions que $\oplus$ est une L.C.I et $\otimes$ une L.C.E.
   $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, donc $x.y \in \mathbb{R}_+^*$, alors $x \oplus y \in \mathbb{R}_+^*$
   donc $\oplus$ est une L.C.I sur E.
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a $x^\lambda > 0$ alors $\lambda \otimes x \in \mathbb{R}_+^*$
   donc $\otimes$ est une L.C.E sur E.
2. Montrons que $(E, \oplus)$ est un groupe commutatif.

   (a) $\oplus$ est commutative ssi : $\forall x, y \in E, x \oplus y = y \oplus x$.

   $$x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$$

   Donc $\oplus$ est commutative.

   (b) $\oplus$ est associative si et seulement si $\forall x, y, z \in E, x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

   $$\begin{aligned} x \oplus (y \oplus z) &= x \oplus (y.z) \\ &= x.y.z = (x \oplus y).z \\ &= (x \oplus y) \oplus z. \end{aligned}$$

   D'où $\oplus$ est associative.

   (c) $e \in E$ est neutre pour la loi $\oplus$ si et seulement si $\forall x \in E : x \oplus e = e \oplus x = x$, donc $x \oplus e = xe = x \Rightarrow e = 1$
   puisque $\oplus$ est commutative alors $e \oplus x = x$, donc $e = 1$ est l'élément neutre pour $\oplus$.

(d) Element symétrique : soit e l'élément neutre pour $\oplus$, un élément $x \in E$ admet un symétrique (inverse), s'il existe $x' \in E$(ou x^{-1}), tel que $x \oplus x' = x' \oplus x = e$

$$x \oplus x' = 1 \Leftrightarrow x.x' = 1 \Rightarrow x' = \frac{1}{x}$$

Donc $\frac{1}{x} \in E$ est le symétrique de x à droite et comme $\oplus$ est commutative alors $\frac{1}{x}$ est le symétrique de x, c-à-d toute élément x de E est symétrisable dans E.

Donc $(\mathbb{R}_+^*, \oplus)$ est un groupe commutatif.

3. $\forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \alpha \otimes (x \oplus y) &= \alpha \otimes (x.y) \\ &= (x.y)^\alpha = x^\alpha . y^\alpha \\ &= (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y). \end{aligned}$$

4. $\forall x \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \otimes x &= x^{\alpha+\beta} = x^\alpha . x^\beta \\ &= (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x). \end{aligned}$$

5. $\forall x \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \alpha \otimes (\beta \otimes x) &= \alpha \otimes x^\beta = (x^\beta)^\alpha \\ &= x^{\beta.\alpha} = (\beta.\alpha) \otimes x. \end{aligned}$$

6. $\forall x \in E$, on a, $1 \otimes x = x^1 = x$

Donc $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

Exercice 2 : Soit $(E, +, *)$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. $E \times E$ est le produit cartésien, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

et

$$(a+ib)*\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.x-b.y \\ a.y+b.x \end{pmatrix}$$

Montrons que $(E\times E,+,*)$ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel.

1. Montrons que $(E\times E,+)$ est un groupe commutatif.

   (a) + est commutative si et seulement si : $\forall (x,y),(x',y')\in E\times E, (x,y)+(x',y')=(x',y')+(x,y)$

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$$

   $$= \begin{pmatrix} x'+x \\ y'+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

   Donc + est commutative.

   (b) + est associative si et seulement si :
   $\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'')\in E\times E, (x,y)+[(x',y')+(x'',y'')] = [(x,y)+(x',y')]+(x'',y'')$

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+x'' \\ y'+y'' \end{pmatrix}$$

   $$= \begin{pmatrix} x+(x'+x'') \\ y+(y'+y'') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+x')+x'' \\ (y+y')+y'' \end{pmatrix}$$

   $$= \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

   $$= [\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}] + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

   D'où + est associative.

(c) (a,b) un élément neutre pour + si et seulement si $\forall(x,y) \in E \times E, (x,y)+(a,b)=(a,b)+(x,y)=(x,y)$, ces égalités équivalent à :
$\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x \\ b+y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+a=x=a+x \\ y+b=y=b+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$
$(0,0)$ est l'élément neutre pour la loi $+$

(d) Element symétrique : soit (α,β) l'élément neutre pour +, un élément $(x,y) \in E \times E$ admet un symétrique (inverse), s'il existe $(x'',y'') \in E \times E$, tel que $(x,y)+(x'',y'') = (x'',y'')+(x,y) = (\alpha,\beta)$, ces égalités équivalent à :
$$\begin{pmatrix} x+x'' \\ y+y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x''+x \\ y''+y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+x''=0=x''+x \\ y+y''=0=y''+y \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x'' = -x \\ y'' = -y \end{cases}$$
Donc l'élément symétrique de (x,y) est $(-x,-y)$.

D'où $(E \times E, +)$ est un groupe commutatif.

2. Soient $(x,y),(x',y') \in E \times E$, et $\alpha = a+ib \in \mathbb{C}$ on a
$$\begin{aligned}(a+ib)*\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a(x+x')-b(y+y') \\ a(y+y')+b(x+x') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax+ax'-by-by' \\ ay+ay'+bx+bx' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax-by \\ ay+bx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ax'-by' \\ ay'+bx' \end{pmatrix} \\ &= (a+ib)*\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (a+ib)*\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3. Soient $(x,y) \in E \times E$, et $\alpha = a+ib, \beta = a'+ib' \in \mathbb{C}$ on a

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta) * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= ((a+a')+i(b+b')) * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a+a')x-(b+b')y \\ (a+a')y+(b+b')x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ax+a'x-by-b'y \\ ay+a'y+bx+b'x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ax-by \\ ay+bx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'x-b'y \\ a'y+b'x \end{pmatrix} \\
&= (a+ib) * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (a'+ib') * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

4. Soient $(x,y) \in E \times E$, et $\alpha = a+ib \in \mathbb{C}, \beta = a'+ib' \in \mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
\alpha * (\beta * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= (a+ib) * \begin{pmatrix} a'x-b'y \\ a'y+b'x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a(a'x-b'y)-b(a'y+b'x) \\ a(a'y+b'x)+b(a'x-b'y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} aa'x-ab'y-ba'y-bb'x \\ aa'y+ab'x+ba'x-bb'y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (aa'-bb')x-(ab'+ba')y \\ (aa'-bb')y+(ab'+ba')x \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= ((aa' - bb') + i(ab' + ba'))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha.\beta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

5. $\forall (x, y) \in E \times E$, on a, $(1 + 0i) * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 0y \\ y + 0x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Donc $(E \times E, +, *)$ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel.

Exercice 3 :

1. On a :

$$\begin{array}{rcl} 0_{\mathbb{K}}.x & = & (0_{\mathbb{K}}2).x \\ & = & 0_{\mathbb{K}}.(2.x) \quad \text{car} \quad (E, +, .) \quad \text{un} \quad \mathbb{K}-\text{espace vectoriel} \\ & = & 0_{\mathbb{K}}.(x + x) \quad \text{d'après la question 1} \\ & = & 0_{\mathbb{K}}.x + 0_{\mathbb{K}}.x \end{array}$$

   en ajoutant $-(0_{\mathbb{K}}.x)$ des deux cotés on obtient l'égalité $0_E = 0_{\mathbb{K}}.x$.

2. D'après la question 2, $0_E = 0_{\mathbb{K}}.x = (1 + (-1)).x = (1.x) + ((-1).x) = x + ((-1).x)$,(car $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel). On en déduit que $(-1).x$ est le symétrique de x, c'est à dire $-x$.

Exercice 4 : Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in E, P = XP' + a, a \in \mathbb{R}\}$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E.

1. Soit $0_{\mathbb{R}[X]} \in \mathbb{R}[X]$ tel que $0_{\mathbb{R}[X]} = X0_{\mathbb{R}[X]} + 0$ pour $a = 0$, alors $0_{\mathbb{R}[X]} \in F$, donc $F \neq \emptyset$.

2. Soit $P = XP' + a, Q = XQ' + b \in F$, et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   Par hypothèse on a d'une part $P = XP' + a$ pour $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda P = \lambda(XP' + a) = X(\lambda P)' + \alpha, \quad \alpha = \lambda a \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

et d'autre part $Q = XQ' + b$ pour $b \in \mathbb{R}$, d'où

$$\mu Q = \mu(XQ' + b) = X(\mu Q)' + \beta, \quad \beta = \mu a \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

(1.3)+(1.4) donne :

$$\lambda P + \mu Q = X(\lambda P)' + \alpha + X(\mu Q)' + \beta = X(\lambda P + \mu Q)' + \gamma, \quad \gamma = \alpha + \beta \in \mathbb{R}$$

ainsi $\lambda P + \mu Q \in F$, donc F est un sous espace vectoriel de E.

Exercice 5 :

1. $I(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R}; f(-x) = -f(x)\}$
   ($I(\mathbb{R})$ est un s.e.v de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$)$\Leftrightarrow$ ($I(\mathbb{R}) \neq \emptyset, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in I(\mathbb{R}), \alpha f + \beta g \in I(\mathbb{R})$)

   - 0 (fonction nulle) appartient à $I(\mathbb{R})$ qui n'est donc pas vide

   - Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(-x) &= (\alpha f)(-x) + (\beta g)(-x) \\ &= \alpha f(-x) + \beta g(-x) \\ &= -\alpha f(x) - \beta g(x) \\ &= -(\alpha f + \beta g)(x)\end{aligned}$$

   d'où $I(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
   $P(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R}; f(-x) = f(x)\}$
   ($P(\mathbb{R})$ est un s.e.v de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$)$\Leftrightarrow$ ($P(\mathbb{R}) \neq \emptyset, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in P(\mathbb{R}), \alpha f + \beta g \in P(\mathbb{R})$)

   - 0 (fonction nulle) appartient à $P(\mathbb{R})$ qui n'est donc pas vide

   - Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(-x) &= (\alpha f)(-x) + (\beta g)(-x) \\ &= \alpha f(-x) + \beta g(-x) \\ &= \alpha f(x) + \beta g(x) \\ &= (\alpha f + \beta g)(x)\end{aligned}$$

d'où $P(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

2. $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = I(\mathbb{R}) \oplus P(\mathbb{R})$?

   Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}); \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$

   posons $p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, p fonction paire, $i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$, i fonction impaire.

$$\begin{aligned} P(\mathbb{R}) \cap I(\mathbb{R}) &= \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{lcl} f(-x) & = & f(x) \\ f(-x) & = & -f(x) \end{array} \right. \right\} \\ &= \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \} \\ &= \{ 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R})} \} \end{aligned}$$

   D'où $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = I(\mathbb{R}) \oplus P(\mathbb{R})$.

3. La décomposition de la fonction exponentielle

   Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = cosh(x) + sinh(x)$$

Exercice 6 : Soient les ensembles suivants :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + z = y - z = 0 \right\}, G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x - y - 2z = 0 \right\},$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0, x - 2y = 0 \right\}.$$

1. Montrons que F, G et H sont des s.e.v de $\mathbb{R}^3$

   -Commençons par G

   (a) $G \neq \emptyset$, car il contient au moins 0, soit $0_{\mathbb{R}^3} \in \mathbb{R}^3$ et $0 - 0 - 2(0) = 0$, alors $0_{\mathbb{R}^3} \in G$, (ie. $G \neq \emptyset$).

(b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in G$.

Par hypothèse on a $x - y - 2z = 0$, $x' - y' - 2z' = 0$, et on veut montrer que $X + X' = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix} \in G$, donc

$$(x + x') - (y + y') - 2(z + z') = \underbrace{x - y - 2z}_{=0} + \underbrace{x' - y' - 2z'}_{=0} = 0$$

Alors $X + X' \in G$, donc G est stable pour la loi interne (+).

(c) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on veut monter que $\lambda X = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} \in G$

$$\lambda x - \lambda y + -2\lambda z = \lambda(\underbrace{x - y - 2z}_{=0}) = \lambda.0 = 0$$

donc $\lambda X \in G$, alors G est stable pour la loi externe $(\times)$.

par conséquent : G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- Montrons que F est un s.e.v.

(a) $F \neq \emptyset$, car il contient au moins 0, soit $0_{\mathbb{R}^3} \in \mathbb{R}^3$ et $0 + 0 = 0 - 0 = 0$, alors $0_{\mathbb{R}^3} \in F$, (ie. $F \neq \emptyset$).

(b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in F$, et soit λ, μ deux réels quelconque .

Par hypothèse on a d'une part $x + z = y - z$, alors

$$\lambda(x + z) = \lambda(y - z) = 0 \tag{1.5}$$

et d'autre part $x' + z' = y' - z'$, d'où

$$\mu(x' + z') = \mu(y' - z') = 0 \tag{1.6}$$

(1.5)+(1.6) donne :

$$\lambda x + \mu x' + \lambda z + \mu z' = \lambda y + \mu y' - (\lambda z + \mu z') = 0$$

Ainsi $\lambda X + \mu X' = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix} \in F$.

Par conséquent : F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- Montrons que H est un s.e.v.

(a) $H \neq \emptyset$, car il contient au moins 0, soit $0_{\mathbb{R}^3} \in \mathbb{R}^3$ et $0 - 0 + 0 = 0$, et $0 - 2(0) = 0$ alors $0_{\mathbb{R}^3} \in H$, (ie. $H \neq \emptyset$).

(b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in H$.

Par hypothèse on a

$$x - y + z = 0, x - 2y = 0 \text{ et } x' - y' + z' = 0, x' - 2y' = 0,$$

on veut montrer que $X + X' = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix} \in H$,

$$(x + x') - (y + y') + (z + z') = \underbrace{x - y + z}_{=0} + \underbrace{x' - y' + z'}_{=0} = 0$$

$$(x + x') - 2(y + y') = \underbrace{x - 2y}_{=0} + \underbrace{x' - 2y'}_{=0} = 0$$

Donc $X + X' \in H$, alors H est stable pour la loi interne (+).

(c) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on veut monter que $\lambda X = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} \in H$,

$$\lambda x - \lambda y + \lambda z = \lambda(\underbrace{x - y + z}_{=0}) = \lambda.0 = 0$$

$$\lambda x - 2\lambda y = \lambda(\underbrace{x - 2y}_{=0}) = \lambda.0 = 0$$

Donc $\lambda X \in H$, alors H est stable pour la loi externe $(\times)$.

D'où H est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

2. Base de G, F et H
   -Commençons par Base de G
   - Famille génératrice de G

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x - y - 2z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x = y + 2z \right\},$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} / y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / y, z \in \mathbb{R} \right\},$$

$$G = vect \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v} \right\},$$

-Montrons que cette famille est libre

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{cases}$$

Alors $\{u, v\}$ est une famille libre et $B_G = \{u, v\}$ base de G, $dimG = card(B_G) = 2$.

-Base de F

- Famille génératrice de F

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + z = 0, y - z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / y = z, x = -z \right\},$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\},$$

$$F = vect \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Cette famille est libre et $B_F = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de F, $dimF = cardB_F = 1$.

-Base de H

- Famille génératrice de H

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0, x - 2y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x = 2y, z = -y \right\},$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ -y \end{pmatrix} / y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} / y \in \mathbb{R} \right\},$$

$$H = vect \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

Puisque H est engendré par un seul vecteur alors la famille est libre et $B_H = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ base de H, $dimH = cardB_H = 1$.

Exercice 7 : Soit les s-e.v. suivants :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0 \right\}, G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x=y=z \right\},$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x=y=0 \right\}.$$

1. base de F, G et H
   - Famille génératrice de F

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x=-y-z \right\},$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} / y,z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / y,z \in \mathbb{R} \right\},$$

$$F = vect \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_2} \right\}.$$

-Montrons que cette famille est libre

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \end{cases}$$

Alors $\{u_1, u_2\}$ est une famille libre et $B_F = \{u_1, u_2\}$ base de F, $dimF = 2$.

-Base de G

- Famille génératrice de G

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x = y = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} = vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Puisque cette famille contient un seul vecteur alors elle est libre et

$B_G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de G, $dimG = cardB_G = 1$.

-Base de H

- Famille génératrice de H

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x = y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\} = vect \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Donc cette famille est libre et $B_H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de H, $dimH = cardB_H = 1$.

2. On a $dim\mathbb{R}^3 = dimF + dimG$, pour montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ il suffit de montrer que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

$$\begin{aligned} F \cap G &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0 \\ x=y &=& z \end{array} \right. \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \left\{ \begin{array}{rcl} 3x &=& 0 \\ x=y &=& z \end{array} \right. \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

D'où $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$. On en déduit que F et G sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires

- On a $dim\mathbb{R}^3 = dimF + dimH$, et

$$\begin{aligned} F \cap H &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0 \\ x=y &=& 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{R}^3 = F \oplus H$. D'où F et H sont 2 sous espaces vectoriels supplémentaires.

Exercice 8 : Soient F et G deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}, G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} / y, z \in \mathbb{R} \right\},$$

-Base de F

$$F=\left\{\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}/x\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}/x\in\mathbb{R}\right\}=vect\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Puisque cette famille contient un seul vecteur alors elle est libre et $B_F=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ base de F, $dimF=cardB_F=1$.

- Base de G

$$G=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}/y,z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}/y,z\in\mathbb{R}\right\}=vect\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_1},\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_2}\right\}.$$

-Montrons que cette famille est libre

Soient $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, alors

$$\lambda_1v_1+\lambda_2v_2=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow\lambda_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=0$$

Alors $\{v_1,v_2\}$ est une famille libre et $B_G=\{v_1,v_2\}$ base de G, $dimG=2$.

-Calculons $F\cap H$

Soit $F=\left\{\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}/x\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3/x=y=z\right\}$ et

$$G=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}/y,z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mathbb{R}^3/x=0\right\}$$

Alors

$$F\cap G=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3,\left\{\begin{array}{rcl}x=y&=&z\\x&=&0\end{array}\right.\right\}=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Et puisque on a $dim\mathbb{R}^3 = dimF + dimG$, alors F et G sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires.

Exercice 9 : Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / \tilde{P}(1) = 0\}$.

1. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

   (a) $E \neq \emptyset$, car il contient au moins 0, soit $0_{\mathbb{R}_2[X]} \in \mathbb{R}_2[X]$ et $0_{\mathbb{R}_2[X]}(1) = 0_{\mathbb{R}}$, alors $0_{\mathbb{R}_2[X]} \in E$, (ie. $E \neq \emptyset$).

   (b) Soit $P, Q \in E$, et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   Par hypothèse on a d'une part $\tilde{P}(1) = 0$, alors
   $$\widetilde{(\lambda P)}(1) = \lambda \tilde{P}(1) = 0 \tag{1.7}$$
   et d'autre part $\tilde{Q}(1) = 0$, d'où
   $$\widetilde{(\mu Q)}(1) = \mu \tilde{Q}(1) = 0 \tag{1.8}$$
   (1.7)+(1.8) donne :
   $$(\widetilde{\lambda P + \mu Q})(1) = \widetilde{(\lambda P)}(1) + \widetilde{(\mu Q)}(1) = \lambda \underbrace{\tilde{P}(1)}_{=0} + \mu \underbrace{\tilde{Q}(1)}_{=0} = 0$$
   Ainsi $\lambda P + \mu Q \in E$, donc E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Base de E et sa dimension

   Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, donc $P = a + bX + cX^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$

   - Famille génératrice de E

   $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / \tilde{P}(1) = 0\}$

   $= \{P \in \mathbb{R}_2[X] / a + b + c = 0\}$

   $= \{P \in \mathbb{R}_2[X] / a = -b - c\}$

   $= \{-b - c + bX + cX^2, b, c \in \mathbb{R}\}$

   $= \{-b(1 - X) - c(1 - X^2), b, c \in \mathbb{R}\}$

$E = vect\{\underbrace{(1-X)}_{P_1}, \underbrace{(1-x^2)}_{P2}\}$

-Montrons que cette famille est libre

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} &\Rightarrow \lambda_1(1-X) + \lambda_2(1-X^2) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
&\Rightarrow \lambda_1 - \lambda_1 X + \lambda_2 - \lambda_2 X^2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
&\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 X - \lambda_2 X^2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Alors $\{P_1, P_2\}$ est une famille libre et $B_E = \{P_1, P_2\}$ base de E, $dimE = 2$

Exercice 10 :

1. Montrons que la partie $\{u_1, u_2\}$ est libre

   Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = o_E &\Rightarrow \lambda_1(e_1 + e_2 - e_3 + e_4) + \lambda_2(e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4) = 0_E \\
&\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2)e_1 + (\lambda_1 + 2\lambda_2)e_2 + (\lambda_2 - \lambda_1)e_3 + (\lambda_1 + \lambda_2)e_4 = 0_E
\end{aligned}$$

   Puisque on a $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ base de E, alors

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_2 - \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

   Donc $\{u_1, u_2\}$ est libre.

   On a $\{u_1, u_2\}$ famille génératrice de F, alors $\{u_1, u_2\}$ est une base de F.

2. Système d'équations de F relativement à la base B

   Soit $u \in E$, tel que $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ dans la base B, si $u \in F$ alors $u = \alpha u_1 + \beta u_2$

$\alpha(e_1+e_2-e_3+e_4)+\beta(e_1+2e_2+e_3+e_4)=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4$
$(\alpha+\beta)e_1+(\alpha+2\beta)e_2+(\alpha-\beta)e_3+(\alpha+\beta)e_4=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta &= x_1 \\ \alpha+2\beta &= x_2 \\ -\alpha+\beta &= x_3 \\ \alpha+\beta &= x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta &= x_2-x_1 \\ 2\beta &= x_1+x_3 \\ x_4-x_1 &= 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_3 &= 2x_2-2x_1 \\ x_4-x_1 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3 &= 0 \\ x_4-x_1 &= 0 \end{cases}$$

3. -Base de G

   On a la famille génératrice de $G=\{e_1,e_2\}$, cette famille est une sous famille de la base $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ donc elle est libre , alors la base de G est $B_G=\{e_1,e_2\}$ et $dimG=2$.

   -Calculons $F\cap G$

   -Système d'équation de G

   Soit $u\in E$, tq $u=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ dans la base B, si $u\in G$ alors $u=\alpha e_1+\beta e_2$

$$\begin{aligned} \alpha e_1+\beta e_2 &= x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha &= x_1 \\ \beta &= x_2 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$F\cap G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3 &= 0 \\ x_4-x_1 &= 0 \\ x_3=x_4 &= 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Et comme $dimE = dimF + dimG$, alors $E = F \oplus G$.

Exercice 11 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ on considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifions que $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   On a $cardB' = dim\mathbb{R}^3 = 3$, donc pour montrer que B' est une base il suffit de montrer que B' est libre ou génératrice.
   Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

d'où $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille libre, alors $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

2. Les coordonnées de e_1, e_2 et e_3 dans cette nouvelle base.

$$e_1 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \Rightarrow e_1 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \beta+4\gamma & = & 1 \\ \alpha-2\beta-3\gamma & = & 0 \\ -\alpha+2\beta+\gamma & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & 2 \\ \beta & = & 1 \\ \gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc les coordonnées de e_1 dans la base B' sont $(2,1,0)$.

$$e_2 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \Rightarrow e_2 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \beta+4\gamma & = & 0 \\ \alpha-2\beta-3\gamma & = & 1 \\ -\alpha+2\beta+\gamma & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & 7/2 \\ \beta & = & 2 \\ \gamma & = & -1/2 \end{array} \right.$$

Donc les coordonnées de e_2 dans la base B' sont $(7/2, 2, -1/2)$.

$$e_3 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \Rightarrow e_3 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \beta+4\gamma & = & 0 \\ \alpha-2\beta-3\gamma & = & 0 \\ -\alpha+2\beta+\gamma & = & 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & 5/2 \\ \beta & = & 2 \\ \gamma & = & -1/2 \end{array} \right.$$

Donc les coordonnées de e_2 dans la base B' sont $(5/2, 2, -1/2)$.

Exercice 12 :

1. Montrons que la famille $B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   On a $cardB = dim\mathbb{R}^3 = 3$, alors pour montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$ il suffit de montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre ou génératrice.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

d'où $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille libre, alors $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

-Les coordonnées du vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans cette nouvelle base.

Les coordonnées du vecteur v dans la base B s'écrit (α, β, γ) tel que α, β, γ vérifiant :

$$v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta + \gamma &= 1 \\ \alpha + \gamma &= 1 \\ \alpha + \beta &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha &= 1/2 \\ \beta &= 1/2 \\ \gamma &= 1/2 \end{cases}$$

Donc les coordonnées de v dans la base B sont $(1/2, 1/2, 1/2)$.

2. Montrons que la famille $B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On a $cardB = dim\mathbb{R}^3 = 3$, donc pour montrer que B est une base il suffit de montrer que B est libre ou génératrice.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

D'où $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille libre, alors $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

3. Les coordonnées de e_1, e_2, e_3 et v dans cette nouvelle base.

$$e_1 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \Rightarrow e_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma &= 1 \\ \alpha + \beta &= 0 \\ \alpha - \gamma &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha &= 2 \\ \beta &= 1 \\ \gamma &= 0 \end{cases}$$

Donc les coordonnées de e_1 dans la base B sont $(1/3, -1/3, 1/3)$.

$$e_2 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \Rightarrow e_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha-\beta+\gamma &= 0 \\ \alpha+\beta &= 1 \\ \alpha-\gamma &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha &= 1/3 \\ \beta &= 2/3 \\ \gamma &= 1/3 \end{cases}$$

Donc les coordonnées de e_2 dans la base B sont $(1/3, 2/3, 1/3)$.

$$e_3 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \Rightarrow e_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha-\beta+\gamma &= 0 \\ \alpha+\beta &= 0 \\ \alpha-\gamma &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha &= 1/3 \\ \beta &= -1/3 \\ \gamma &= -2/3 \end{cases}$$

donc les coordonnées de e_3 dans la base B sont $(1/3, -1/3, -2/3)$.

$$v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha-\beta+\gamma &= 1 \\ \alpha+\beta &= 2 \\ \alpha-\gamma &= -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= 2 \\ \gamma &= 3 \end{cases}$$

Donc les coordonnées de v dans la base B sont $(0, 2, 3)$.

Exercice 13 : Soit $P_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2), P_1 = -X(X-2), P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrons que $\{P_0, P_1, P_2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   On a $dim\mathbb{R}_2[X] = card\{P_1, P_2, P_3\} = 3$ alors il suffit de montrer que cette famile est libre pour qu'elle soit une base.
   Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, alors

$\lambda_1 P_0 + \lambda_2 P_1 + \lambda_3 P_2 \ = \ 0_{\mathbb{R}_2[X]} \ \Rightarrow \ \lambda_1(\frac{1}{2}(X-1)(X-2)) + \lambda_2(-X(X-2)) + \lambda_3(\frac{1}{2}X(X-1)) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$

$$\Rightarrow (\tfrac{1}{2}\lambda_1 - \lambda_2 + \tfrac{1}{2}\lambda_3)X^2 + (-\tfrac{3}{2}\lambda_1 + 2\lambda_2 - \tfrac{1}{2}\lambda_3)X + \lambda_1 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2}\lambda_1 - \lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3 & = & 0 \\ -\frac{3}{2}\lambda_1 + 2\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Alors B est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.

   Exprimons P dans la base $\{P_0, P_1, P_2\}$.

   $P = aX^2 + bX + c = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 \Rightarrow \alpha(\frac{1}{2}(X-1)(X-2)) + \beta(-X(X-2)) + \gamma(\frac{1}{2}X(X-1)) = aX^2 + bX + c$

$$\Rightarrow (\tfrac{1}{2}\alpha - \beta + \tfrac{1}{2}\gamma)X^2 + (-\tfrac{3}{2}\alpha + 2\beta - \tfrac{1}{2}\gamma)X + \alpha = aX^2 + bX + c$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2}\alpha - \beta + \frac{1}{2}\gamma & = & a \\ -\frac{3}{2}\alpha + 2\beta - \frac{1}{2}\gamma & = & b \\ \alpha & = & c \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & c \\ \beta & = & a+b+c \\ \gamma & = & 4a+2b+c \end{array} \right.$$

   D'où $P = cP_0 + (a+b+c)P_1 + (4a+2b+c)P_2$

3. Soit $Q = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

   Exprimons Q dans la base $\{1, X, X^2\}$.

$$\begin{array}{rcl} Q = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 & = & \alpha(\frac{1}{2}(X-1)(X-2)) + \beta(-X(X-2)) + \gamma(\frac{1}{2}X(X-1)) \\ & = & (\frac{1}{2}\alpha - \beta + \frac{1}{2}\gamma)X^2 + (-\frac{3}{2}\alpha + 2\beta - \frac{1}{2}\gamma)X + \alpha \end{array}$$

Chapitre 2

Applications linéaires

2.1 Applications linéaires

Soient $(E, +_{\mathbb{E}}, \cdot_{\mathbb{E}})$, $(F, +_{\mathbb{F}}, \cdot_{\mathbb{F}})$ deux espaces vectoriels sur un corps commutatif $\mathbb{K}$.

Définition 2.1.1. *On appelle application linéaire de E vers F toute application $f : E \longrightarrow F$ vérifiant :*

1. $\forall\, x, y \in E; f(x +_{E} y) = f(x) +_{F} f(y);$
2. $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \forall\, x \in E; f(\alpha \cdot_{E} x) = \alpha \cdot_{F} f(x).$

On note $\mathcal{L}(E, F)$, l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

Remarque 2.1.1. *De la définition précédente, f est une application linéaire si est seulement si :*

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall\, x, y \in E; f(\alpha \cdot_{E} x +_{E} \beta \cdot_{E} y) = \alpha \cdot_{F} f(x) +_{F} \beta \cdot_{F} f(y).$$

Définition 2.1.2. *Soient E,F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels.*

1. *On dit que f est un* homomorphisme *de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de E dans F.*
2. *Une application linéaire bijective est appelée* isomorphisme.

3. *Une application linéaire de E dans lui-même est appelée* endomorphisme.
4. *Un isomorphisme de E dans E est appelé* automorphisme.
5. *Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelée* forme linéaire.

Remarque 2.1.2. *1. La première relation de la définition traduit le fait que f est un morphisme de groupe additif de $(E,+)$ dans (F, +). En particulier, on a $f(0_{_E}) = 0_{_F}$.*
2. Pour tout vecteur $x \in E$, on a $f(-x) = -f(x)$.

2.1.1 Structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{L}(E,F)$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$, ou tout simplement $\mathcal{L}(E,F)$, possède une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, puisque pour tous $f,\ g \in \mathcal{L}(E,F)$ et pour tous $\alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$; $\alpha \underset{\mathcal{L}(E,F)}{\cdot} f \underset{\mathcal{L}(E,F)}{+} \beta \underset{\mathcal{L}(E,F)}{\cdot} g \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que pour tout $x \in E$

$$(f \underset{\mathcal{L}(E,F)}{+} g)(x) = f(x) +_{_F} g(x).$$

$$(\alpha \underset{\mathcal{L}(E,F)}{\cdot} f)(x) = \alpha \cdot_{_F} f(x).$$

Remarque 2.1.3. *Il est aisé de vérifier que la composition de deux applications linéaires est linéaire.*

Exemple 2.1.1. *L'application ψ qui à un couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ associé le nombre $x+iy$ de $\mathbb{C}$ est un morphisme du $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{C}$. De plus ψ est bijective donc est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

2.1.2 Structure d'anneaux de $End(E) = \mathcal{L}(E,E)$

Etant donné un endomorphisme f de E, on convient de noter, pour tout entier k non nul,

$$f^k \overset{not.}{=} \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k-fois}$$

et $f^0 = Id_E$.

Définition 2.1.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un endomorphisme f de E est dite nilpotent si*

$$\exists\, k \in \mathbb{N}^*;\; f^k = 0,$$

c'est-à-dire s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k(x) = 0_E$ pour tout $x \in E$.

Bien évidemment, si $f^k = 0$ alors en composant par f on en déduit $f^{k+1} = 0$, et plus généralement,

$$\forall k' \geq k,\; f^{k'} = 0.$$

Ainsi, l'entier k n'est pas le plus grand indice pour lequel $f^k = 0$. Il n'est d'ailleurs pas nécessairement le plus petit.

Définition 2.1.4. *Soit f un endomorphisme de E. On définit l'indice de nilpotance, p, de f comme étant le plus petit entier naturel non nul tel que $f^p = 0$, c'est-à-dire*

$$p \overset{def.}{=} min\{k \in \mathbb{N}^* /\; f^k = 0\}$$

Remarque 2.1.4. *Si l'espace E est de dimension finie alors on peut montrer que l'indice de nilpotence d'un endomorphisme de E est nécessairement inférieur ou égal à la dimension de l'espace E.*

Proposition 2.1.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E. Pour que f possède la propriété de nilpotence, il suffit qu'il existe un entier k (nécessairement compris entre 1 et n) tel que*

$$f^k(e_1) = f^k(e_2) = \cdots = f^k(e_n) = 0_E$$

où $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\} = \mathcal{B}$ est une base de E.

Démonstration. Si la propriété de nilpotence est vraie pour les éléments de la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire il existe un entier $k \leq n$; $f^k(e_1) = f^k(e_2) = \cdots = f^k(e_n) = 0_E$, elle est nécessairement vraie pour n'importe quel vecteur x de E puisque, en notant $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} f^k(x) &= f^k(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n) \\ &= \alpha_1 \underbrace{f^k(e_1)}_{=0_E} + \alpha_2 \underbrace{f^k(e_2)}_{=0_E} + \cdots + \alpha_n \underbrace{f^k(e_n)}_{=0_E} = 0_E. \end{aligned}$$

$\square$

Définition 2.1.5. *Un endomorphisme p de E est un projecteur de E si $p \circ p = p$.*

Définition 2.1.6. *Un endomorphisme s de E est une symétrie*[1] *de E si $s \circ s = id_E$.*

Remarque 2.1.5. *Si p est un projecteur de E alors $2p - id_E$ est une symétrie de E. En effet,*

$$\begin{aligned} (2p - id_E)^2 &= (2p - id_E) \circ (2p - id_E) \\ &= 2p \circ 2p - 2p \circ id_E - id_E \circ 2p + id_E \circ id_E \\ &= 4(p \circ p) - 2p - 2p + id_E \\ &= 4p - 4p + id_E \\ &= id_E \end{aligned}$$

où on a utilisé $p \circ p = p$. Réciproquement, si s est une symétrie de E alors $\frac{1}{2}(s + id_E)$ est un projecteur de E.

2.1.3 Image et Noyau

Soient f une application de E dans F et A un sous-ensemble de E. On rappelle que l'image par f de A, que l'on note $f(A)$, est le sous-ensemble de F défini par :

$$f(A) \overset{def.}{=} \{f(x) \in F / \ x \in A\}.$$

1. Une symétrie s de E définit ainsi une bijection de E, c'est donc un automorphisme de E tel que $s^{-1} = s$.

Si l'ensemble A ne possède aucune structure algébrique particulière et si f est une application quelconque alors, a priori, l'ensemble $f(A)$ ne possède lui non plus aucune structure algébrique remarquable. En revanche, la situation est différente si A possède une structure de sous-espace vectoriel et si f est linéaire ; alors $f(A)$ est un sous-espace vectoriel.

Proposition 2.1.2. *Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, si A un sous espace vectoriel de E et B un sous espace vectoriel de F alors, $f(A)$ est un sous espace vectoriel de F, et $f^{-1}(B)$ est un sous espace vectoriel de E.*

Définition 2.1.7. *On appelle l'image de f est le sous-ensemble $f(E)$ de F défini par :*

$$f(E) \overset{def.}{=} \{f(x)/\ x \in E\}.$$

L'orsque f est linéaire, nous particularison la notion comme suit $Imf = f(E)$ qui est un sous-espace vectoriel de F. Soient $E,\ F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. L'ensemble des vecteurs de E qui ont pour image $0_{_F}$ par f est appelé noyau de f et se note $kerf$, en d'autres termes :

$$Kerf \overset{def.}{=} f^{-1}\{0_{_F}\} = \{x \in E/\ f(x) = 0_{_F}\}.$$

Remarque 2.1.6. *La propriété de la linéarité de l'application f nous assure que l'ensemble $Kerf$ n'est jamais vide, en effet $0_{_E} \in Kerf$, et on déduit également que $Kerf$ est un sous-espace vectoriel de E.*

La proposition suivante est très importantes en algèbre. Nous, souvent, l'utiliserons dans plusieurs démonstrations

Proposition 2.1.3. *Soient E, F deux $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On a alors les équivalences suivantes :*

1. *f est injective si et seulement si $Kerf = \{0_E\}$;*

2. *f est surjective si et seulement si $Imf = F$. Cette caractérisation est vraie même si f n'est pas linéaire.*

Démonstration. 1. Dans un premier temps, supposons que f est injective et calculons son noyau

$$\begin{aligned} Kerf &= \{x \in E / f(x) = 0_F\} \\ &= \{x \in E / f(x) = f(0_E)\} \quad (f \quad \text{est} \quad \text{linéaire}) \\ &= \{x \in E / x = 0_E\} \quad (f \quad \text{est} \quad \text{injective}) \\ &= \{0_E\} \end{aligned}$$

Montrons maintenant l'implication inverse. Supposons que le noyau de f est réduit à $\{0_E\}$. Pour tous $x_1, x_2 \in E$ on a

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0_F \\ &\Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0_F \quad (f \quad \text{est} \quad \text{linéaire}) \\ &\Rightarrow x_1 - x_2 \in Kerf \\ &\Rightarrow x_1 - x_2 = 0_E \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

2. Supposons que f est surjective et on montre que $f(E) = F$. Remarquons que l'inclusion $F(E) \subset F$ est automatiquement vérifié puisque l'image de f est un sous-ensemble de l'espace d'arrivée. Pour montrer l'inclusion inverse, soit $y \in F$. Puisque f est surjective (par hypothèse), il existe au moins $x \in E$ tel que $y = f(x)$ qui est dans $f(E)$.

Pour le deuxième implication, supposons que $f(E) = F$ et on montre que f est surjective. Soit $y \in F$ cela implique que $y \in f(E)$ puisque $F = f(E)$ (par hypothèse), et comme $f(E) = \{f(x) \in F / x \in E\}$ (par définition) cette dernière égalité nous assure l'existence de $x \in E$ tel que $y = f(x)$. D'où f est surjective.

□

2.2 Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

2.2.1 Image d'une famille génératrice

Soit f une application linéaire de E dans F. Considérons une famille $\mathcal{G}$ génératrice de l'espace de départ E. On cherche à démontrer que son image par f, la famille $f(\mathcal{G})$, est génératrice de $vect(f(\mathcal{G}))$ qui est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ F, en d'autres termes :

$$f(vect(\mathcal{G})) = vect(f(\mathcal{G}))$$

Cet espace est en fait remarquable puisqu'il est égal à $f(E)$.

Proposition 2.2.1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E alors l'image par f de la famille $\mathcal{G}$ est génératrice du sous-espace vectoriel Imf de F. C'est-à-dire ;*

$$(f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F) \ \text{ et } \ E = vect(\mathcal{G})) \Longrightarrow \ Imf = vect(f(\mathcal{G})).$$

Démonstration. Par souci de simplification, on suppose que l'espace vectoriel E est de dimension finie. La démonstration dans le cas de dimension infinie ne pose pas de difficulté. Soit $\mathcal{G} = (x_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille génératrice de l'espace E. Montrons que tout vecteur de Imf s'écrit comme une combinaison linéaire de la famille $f(\mathcal{G}) = (f(x_i))_{1\leq i\leq m}$. Soit y un élément de Imf. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. L'espace E étant engendré par $\mathcal{G}$, c'est-à-dire ;

$$\exists(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in \mathbb{K}^m; \ \ x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m.$$

On en déduit alors, en appliquant f, l'égalité suivante

$$f(x) = f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m).$$

L'application f étant linéaire et puisque $y = f(x)$, on obtient

$$y = \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_m f(x_m),$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire 2.2.1. *Si E est de dimension finie alors Imf est de dimension finie et*

$$dim_{\mathbb{K}}(Imf) \leq dim_{\mathbb{K}}(E).$$

2.2.2 Image d'une famille libre

Cherchons maitenant à répondre à la question suivante : l'image par une application linéaire d'une famille libre est-elle encore une famille libre ? Pour cela, considérons une famille libre $\mathfrak{L}$ de E et supposons, par souci de simplification, que cette famille est finie. Soient $\mathfrak{L} = (x_1, \cdots, x_m)$ et f une application linéaire de E dans F. On a $f(\mathfrak{L}) = (f(x_1), \cdots, f(x_m))$. Aussi, si deux vecteurs de $\mathfrak{L}$ ont même image par f, alors la famille $f(\mathfrak{L})$ n'est pas libre. Cette situation n'arrive pas si f est injective. Supposons maitenant que les vecteurs de $f(\mathfrak{L})$ sont tous différents et essayons de voir à quelle condition les vecteurs de $f(\mathfrak{L})$ forment une famille libre. Partons de la relation de liaison

$$\alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_m f(x_m) = 0_F.$$

On a, par linéarité de f,

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m) = f(0_E).$$

Sans aucune hypothèse supplémentaire sur l'application f, on ne peut rien en déduire. Si maintenant on suppose que f est injective alors on a nécessairement

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = 0_E.$$

On en déduit

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0,$$

puisque $\mathfrak{L}$ est libre. On a ainsi donné une condition suffisante pour que l'image d'une famille libre, par une application linéaire, est libre et on a démontré (dans le cas d'une famille finie libre) la proposition suivante.

Proposition 2.2.2. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathfrak{L}$ une famille libre dans E et f une application linéaire de E dans F. Si f est injective alors $f(\mathfrak{L})$ est une famille libre de F.*

Démonstration. Il reste à démontrer ce résultat dans le cas d'une famille $\mathfrak{L}$ infinie libre dans E. C'est immédiat en appliquant le raisonnement précédent. □

2.2.3 Image d'une base

Après s'être intéressé à l'image d'une famille génératrice $\mathcal{G}$ à la proposition 2.2.1, puis à celle d'une famille libre $\mathfrak{L}$ à la proposition 2.2.2, il est à présent naturel de s'intéresser à l'image d'une famille qui soit à la fois libre et génératrice, c'est-à-dire à l'image d'une base $\mathcal{B}$. Se pose alors la question suivante : l'image par une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ d'une base de E est-elle une base de F ?

Pour y répondre, examinons les deux questions suivantes.

1. De quel sous-espace de l'espace d'arrivée la famille $f(\mathcal{B})$ est-elle génératrice ? Daprès la proposition 2.2.1, on sait que la famille $f(\mathcal{B})$ est génératrice de Imf puisque $\mathcal{B}$ est génératrice de E.

2. La famille $f(\mathcal{B})$ est-elle libre dans F ? La famille $\mathcal{B}$ étant libre dans E, on a vu que pour que $f(\mathcal{B})$ soit libre dans F, il suffit que f soit injective (voir la proposition 2.2.2).

Par conséquent,on peut donner un premier élément de réponse : si l'application linéaire f est injective alors l'image par f d'une base de E est une base, non pas de tout l'espace d'arrivée F, mais seulement de son sous-espace Imf. La proposition suivante complète cette réponce. Elle fournit une seconde caractérisation d'une application linéaire injective.

Proposition 2.2.3. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. L'application f est injective si, et seulement si, l'image par f d'une base de E est une base de Imf.*

Démonstration. Dans cette démonstration on se restreint au cas d'une base finie. Nous avant déjà établi que si f est injective alors l'image par f d'une base de E est une base du sous-espace Imf. Montrons la réciproque. Considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_m)$ de E telle que $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \cdots, f(e_m))$ soit une base de Imf. Soit x un vecteur de $Kerf$ de coordonnées $x_1, \cdots, x_m$ dans la base $\mathcal{B}$. C'est-à-dire

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_me_m.$$

En appliquant f, en utilisant la linéarité de f et $f(x) = 0_F$, on a

$$0_F = x_1f(e_1) + \cdots + x_mf(e_m).$$

Les vecteurs $f(e_1), \cdots, f(e_m)$ étant libres (par hypothèse), on déduit de la relation précédente que $x_1 = \cdots = x_m = 0$ qui nous donne $x = 0_E$. on a ainsi montré que $Kerf = \{0_E\}$, c'est-à-dire que f est injective. □

Corollaire 2.2.2. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{B}$ est une base de E et f une application linéaire de E dans F. L'application f est bijective si, et seulement si, $f(\mathcal{B})$ est une base de F.*

Proposition 2.2.4. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Une condition nécessaire et suffisante pour que E et F soient isomorphes est que $dim_{\mathbb{K}}E = dim_{\mathbb{K}}F$.*

Démonstration. Supposons que E et F soient isomorphe, c'est-à-dire il existe un isomorphisme f de E vers F. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Ona $card(\mathcal{B}) = dim_{\mathbb{K}}E$. D'après le corollaire 2.2.2, $f(\mathcal{B})$ est une base de F. Comme $card(f(\mathcal{B})) = dim_{\mathbb{K}}F$, on a

$dim_{\mathbb{K}}E = dim_{\mathbb{K}}F$ car $card(\mathcal{B}) = card(f(\mathcal{B}))$. Réciproquement, supposons que $dim_{\mathbb{K}}E = dim_{\mathbb{K}}F$. Soient $\mathcal{B}_E = (e_i)_{1\leq i\leq m}$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_i)_{1\leq i\leq m}$ une base de F. Considérons l'application linéaire f qui transforme $\mathcal{B}_E$ en $\mathcal{B}_F$, c'est-à-dire telle que $f(e_i) = f_i$ pour $i = 1\cdots m$. On en déduit que les deux espaces E et F sont isomorphe puisque l'application f définit un isomorphisme de E vers F (cela se justifie en utilisant le corollaire 2.2.2). □

2.3 Isomorphisme entre E et K^n

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E. L'application donnée par

$$\begin{array}{rccc} Iso_{(E,B)} & : & E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & & x & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ est isomorphisme d'espace vectoriel.

Le vecteur $Iso_{(E,B)}(x)$ est appelé le vecteur colonne associé à x relativement à la base B, parfois on le note par $V_c(P)$.

Remarque 2.3.1. *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension m (avec $m \geq 1$) est donc isomorphe à $\mathbb{K}^m$.*

Exemple 2.3.1. *Dans $\mathbb{R}_2[x]$ muni de la base $B = \{2, 2x-1, x^2-2\}$, le vecteur colonne associé à $P = 9x^2 + 4x - 6$ relativement à la base B est*

$$V_c(P) = Iso_{(\mathbb{R}_2[x],B)}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.4 Rang d'une application linéaire

Dans cette section, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définition 2.4.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nécessairement de dimension finie. Le rang d'une application linéaire f de E dans F est la dimension de l'image de f, c'est-à-dire : $rgf \stackrel{def.}{=} dim_{\mathbb{K}} Imf$.*

Si $dim_K E = m$ et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_m)$ représente une base de E alors

$$Imf = vect(f(e_1), \cdots, f(e_m))$$

et par conconséquent, $dim_{\mathbb{K}} Imf = dim_{\mathbb{K}} vect(f(e_1), \cdots, f(e_m))$, autrement dit,

$$rgf = rg(f(e_1), \cdots, f(e_m)).$$

D'après le corollaire 2.2.1, on a :

$$rgf \leq dim_{\mathbb{K}} E. \tag{2.1}$$

Si l'espace d'arrivée F est de dimension finie alors,

$$rgf \leq dim_{\mathbb{K}} F. \tag{2.2}$$

En combinant (2.1) et (2.2), on obtient $rgf \leq min\{dim_{\mathbb{K}} E, dim_{\mathbb{K}} F\}$. On résume ces résultats dans la proposition suivante.

Proposition 2.4.1. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec E de dimension finie telle que $dim_{\mathbb{K}} E = m$ et F de dimension quelconque, et f une application linéaire de E dans F.Alors $rgf \leq m$. De plus, si F est de dimension finie avec $dim_{\mathbb{K}} F = n$, alors*

$$rgf \leq min\{m, n\}.$$

2.4.1 Théorème du rang

Le théorème suivant est fondamental en algèbre linéaire. Nous l'utiliserons à de multiples reprises.

Théorème 2.4.1. ***(Théorème du rang)*** *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nécessairement de dimension finie. Pour toute application linéaire f de E dans F, on a : $dim_{\mathbb{K}}E = rgf + dim_{\mathbb{K}}Kerf$.*

Démonstration. L'espace vectoriel E est de dimension finie, donc $kerf$, comme étant un sous-espace vectoriel de E, est de dimension finie. De même, d'après la proposition 2.2.1, Imf comme étant un sous-espace vectoriel de F et aussi de dimension finie. On pose $dim_{\mathbb{K}}Kerf = p$ et $dim_{\mathbb{K}}Imf = q$. Soit $B_{Kerf} = \{u_1, ..., u_p\}$ une base de $Kerf$, c'est-à-dire $f(u_1) = f(u_2) = ... = f(u_p) = 0_F$. Soit $B_{Imf} = \{w_1, w_2, ..., w_q\}$ une base de Imf, donc il évident d'écrire

$$\forall i \in \{1, 2, ..., q\}, \exists v_i \in E \quad tq \quad f(v_i) = w_i$$

Ce qui permet de construire une famille $B_s = \{v_2, v_2, ..., v_q\}$ constituée de q vecteurs de l'espace de départ E qui sont bien sûr distincts puisque les vecteurs $w_1, w_2, ..., w_q$ le sont.
Pour tout $i \in \{1, 2, ..., q\}, v_i \notin Kerf$ puisque $f(v_i) = w_i \neq 0_F$. D'où

$$B_s \cap B_{Kerf} = \emptyset$$

Cela permet de déduire que

$$card(B_s \cup B_{Kerf}) = card(B_s) + card(B_{kerf})$$

La démonstration consiste maintenant à montrer que $B_s \cup B_{Kerf}$ est une base de E. On aura donc

$$card(B_s \cup B_{Kerf}) = dim_{\mathbb{K}}E$$

Montrons dans un premier temps que $B_s \cup B_{Kerf}$ constitue une famille libre dans E. Considérons la relations de liaison

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_q v_q + \alpha_{q+1} u_1 + \alpha_{q+2} u_2 + ... + \alpha_{q+p} u_p = 0_E. \tag{2.3}$$

En appliquant f à l'équation (2.3)et en utilisant le fait que f est linéaire, on obtient

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_q w_q = 0_F.$$

On en déduit $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_q = 0_{\mathbb{K}}$. Puisque la famille $B_{Imf} = \{w_1, w_2, ..., w_p\}$ est une base de Imf. La relation de liaison (2.3)s'écrit ainsi

$$\alpha_{q+1} u_1 + \alpha_{q+2} u_2 + ... + \alpha_{q+p} u_p = 0_E.$$

Il en résulte que $\alpha_{q+1} = \alpha_{q+2} = ... = \alpha_{q+p} = 0_{\mathbb{K}}$ car la famille $B_{Kerf} = \{u_1, ..., u_p\}$ est une base de $Kerf$.

Montrons maintenant que $B_s \cup B_{Kerf}$ constitue une famille génératrice de E, c'est à dire $E = vect(B_s \cup B_{Kerf})$. Vérifions pour cela que tout vecteur de E s'exprime comme une combinaison linéaire des vecteurs de $B_s \cup B_{Kerf}$. Soit $x \in E$. Décomposons $f(x)$ dans la base B_{Imf} de Imf.

$$\begin{aligned} \exists!(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_q) \in \mathbb{K}^q \quad f(x) &= \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + ... + \beta_q w_q \\ &= \beta_1 f(v_1) + \beta_2 f(v_2) + ... + \beta_q f(v_q). \end{aligned}$$

Par linéarité de f, on en déduit que

$$f(x - (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_q v_q)) = 0_F.$$

Par ailleurs le vecteur $x - (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_q v_q)$ appartient à $Kerf$.
Décomposons-le dans la base B_{Kerf} de $Kerf$

$$\exists!(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p) \in \mathbb{K}^p \quad x - (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_q v_q) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_p u_p.$$

On a ainsi obtenu

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_q v_q.$$

Ce qui montre que $x \in vect(B_s \cup B_{Kerf})$. D'où $E = vect(B_s \cup B_{Kerf})$ et

$$dim_{\mathbb{K}} E = dim_{\mathbb{K}} Kerf + dim_{\mathbb{K}} Imf.$$

Qui est la relation cherchée. □

Exemples 2.4.1. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire. on peut vérifier si f n'est pas identiquement nulle alors son noyau et un hyperplan vectoriel de E. Rappelons que les seuls sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\mathbb{K}$ sont $\{o_{\mathbb{K}}\}$ et $\mathbb{K}$. Limage de f étant non réduite à 0 puisque f n'est pas identiquement nulle, elle est nécessairement égale à $\mathbb{K}$. On a donc*

$$rgf = dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = 1$$

En appliquant le théorème du rang à la forme linéaire f, on obtient

$$\underbrace{dim_{\mathbb{K}} E}_{=n} = dim_{\mathbb{K}} Kerf + \underbrace{rgf}_{=1} \quad i.e \quad dim_{\mathbb{K}} Kerf = n - 1$$

Nous avons ainsi vérifié que le noyau de f était de dimension $n - 1$. C'est donc un hyperplan vectoriel de E.

2.4.2 Conséquences du Théorème du rang

La relation donnée par le théorème 2.4.1 est indépendante de la dimension de l'espace d'arrivée F, ce dernier pouvant être de dimension finie ou infinie. le cas où cet espace et de dimension finie on a les résultats suivants.

Corollaire 2.4.1. *Soient E, F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension finies (non-nécessairement égaux) et f une application linéaire de E dans F. On a alors les équivalences suivantes :*

1. *f est surjective $\Leftrightarrow$rg f=$dim_{\mathbb{K}}F$;*
2. *f est injective $\Leftrightarrow$rg f=$dim_{\mathbb{K}}E$;*
3. *f est bijective $\Leftrightarrow$rg f=$dim_{\mathbb{K}}E = dim_{\mathbb{K}}F$.*

Démonstration. La preuve de ces trois propriétés, en appliquant la proposition 2.1.3, et assez courte.

1. La propriété de surjectivité est équivalente à la propriété "$Imf = F$" qui est elle-même équivalente à la propriété $rgf =$ "$dim_{\mathbb{K}}F$"
2. La propriété d'injectivité est équivalente à la propriété
$$Kerf = \{0_E\}$$
qui est elle-même équivalente, d'après le théorème 2.4.1, a la propriété
$$dim_{\mathbb{K}}E = rgf$$
3. C'est un conséquence immédiate d'après ce qui précède.

□

Remarque 2.4.1. *En utilisant le théorème 2.4.1 et la proposition 2.4.1 on vérifie immédiatement les trois propriétés suivantes :*

1. *f surjective$\Rightarrow dim_{\mathbb{K}}E \geq dim_{\mathbb{K}}F$;*
2. *f injective$\Rightarrow dim_{\mathbb{K}}E \leq dim_{\mathbb{K}}F$;*
3. *f bijective$\Rightarrow dim_{\mathbb{K}}E = dim_{\mathbb{K}}F$.*

En effet, supposons que f est surjective (c'est-à-dire $rgf = dim_{\mathbb{K}}F$). On a
$$dim_{\mathbb{K}}E = dim_{\mathbb{K}}F + dim_{\mathbb{K}}Kerf \geq dim_{\mathbb{K}}F$$
puisque $dim_{\mathbb{K}}Kerf \geq 0$.
Pour la deuxième propriété, supposons que f soit injective (c'est-à-dire $Kerf = \{0_E\}$). On a donc
$$dim_{\mathbb{K}}E = dim_{\mathbb{K}}Imf \leq dim_{\mathbb{K}}F$$

puisque $Im f$ est un sous-espace vectoriel de F.
En fin, en combinant les deux propriétés précédentes on obtient la troisième.

Attention : En général la réciproque des trois implication des propriétés précédentes sont fausses.
On en déduit de la proposition 2.4.1 le résultat suivant.

Corollaire 2.4.2. *Soient E, F deux $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels de dimension finies, f une application linéaire de E dans F. Si $dim_{\mathbb{K}} E = dim_{\mathbb{K}} F$ alors on a les équivalences suivantes :*

$$f \quad bijective \Leftrightarrow f \quad injective \Leftrightarrow f \quad surjective$$

Proposition 2.4.2. *Soient E, F et G trois $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels de dimension finies, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G*

1. *Si f est bijective alors $rg(g \circ f) = rg(g)$.*
2. *Si g est bijective alors $rg(g \circ f) = rg(f)$.*

Démonstration. Rappelons que, par définition,

$$rg(g \circ f) = dim_{\mathbb{K}} Im(g \circ f) \quad et \quad Im(g \circ f) = g(f(E))$$

1. Supposons que f est bijective (et g quelconque) et montrons que $rg(g \circ f) = rgg$.
On a, en tenant compte $f(E) = F$ (puisque f bijective),

$$rg(g \circ f) = dim_{\mathbb{K}}(g(f(E))) = dim_{\mathbb{K}}(g(F)) = dim_{\mathbb{K}} Im(g) = rg(g).$$

2. Supposons à présent g bijective (et f quelconque) et montrons que $rg(g \circ f) = rgf$. On sait que $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F, posons alors l'application

$$\begin{array}{rcccl} \tilde{g} & : & f(E) & \longrightarrow & G \\ & & y & \longmapsto & \tilde{g}(y) = g(y) \end{array}$$

C'est la restriction de g au sous-espace vectoriel $f(E)$. Calculons maintenant le noyau de $\tilde{g}$.

$$\begin{aligned} Ker\tilde{g} &= \{y \in f(E)/\tilde{g}(y) = 0_G\} \\ &= \{y \in f(E)/g(y) = 0_G\} \\ &\subset (Kerg) = \{0_F\} \end{aligned}$$

En appliquant le théorème 2.4.1 (du rang) à l'application $\tilde{g}$ on obtient

$$dim_{\mathbb{K}} f(E) = dim_{\mathbb{K}} Ker\tilde{g} + dim_{\mathbb{K}} Im\tilde{g}$$

Ce qui nous donne

$$rgf = dim_{\mathbb{K}} \tilde{g}(f(E)) = dim_{\mathbb{K}} g(f(E)) = rg(g \circ f).$$

$\square$

2.5 Exercice

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y + z \\ x - 2y + z \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base de $Kerf$, en déduire $dim(Imf)$. Donner une base de Imf.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par : $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -3x + 3y \end{pmatrix}.$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Montrer que f est ni injective ni surjective.

Exercice 3 : Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égale à 3. On définit f l'application de E dans lui-même par

$$f(P) = P + (1 - X)P'$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de Imf.
3. Déterminer une base de $kerf$.

Exercice 4 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, on considère l'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3, f(e_3) = 4e_1 + e_2 + 4e_3$.

1. Donner l'expression de $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
2. Calculer $f(e_1 + 2e_2), f^2(e_1), f^2(e_2), f^2(e_3)$, où $f^2 = f \circ f$.
3. Déterminer le noyau et l'image de l'application f.
4. Ces sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice 5 : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

1. $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$.
2. $Ker(f) = Ker(f \circ f)$.

Exercice 6 : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$Kerf = Imf \Leftrightarrow f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad et \quad n = 2.rg(f).$$

Exercice 7 : Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $G \in \mathcal{L}(F, G)$. Démontrer que :

$$g \circ f = 0 \Leftrightarrow Imf \subset Kerg.$$

Exercice 8 : Déterminer la forme linéaire f sur $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0, f\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=1, f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=4.$$

Exercice 9 : Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y+z\\z\\0\end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $Kerf$ et Imf.
2. Calculer $f^2=f\circ f$ puis $Kerf^2$ et Imf^2.
3. Montrer que f est nilpotente.

Exercice 10 : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et soit $f\in\mathcal{L}(E)$.
Montrer que : $Imf=Imf^2\Leftrightarrow E=Kerf+Imf$.
Si de plus E est de dimension finie, montrer que : $Imf=Imf^2\Leftrightarrow E=Kerf\oplus Imf$.
Exercice 11 : Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions finies

1. Montrer que si f est injective alors $dimE\leq dimF$.
2. Montrer que si f est surjective alors $dimE\geq dimF$.

Exercices supplémentaires

Exercice 12 : Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ l'application définie par :

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+z\\2x+y-z\end{pmatrix}.$$

Montrer que f est linéaire. Déterminer $Kerf$, en déduire le rang de l'application f.

Exercice 13 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+4y+4z \\ -x+z \\ -2x+4y+4z \end{pmatrix}$$

Déterminer une base de $Kerf$ et une base de Imf. A-t-on $Kerf \oplus Imf = \mathbb{R}^3$?

Exercice 14 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, on considère l'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f(e_1) = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + 2e_3), f(e_2) = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3), f(e_3) = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3)$.

Soit $F = \{X \in \mathbb{R}^3 / f(X) = -X\}, G = \{X \in \mathbb{R}^3 / f(X) = X\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que $e_1 - e_2, e_1 - e_3 \in F$ et que $e_1 + e_2 + e_3 \in G$.

3. Que peut-on déduire sur les dimensions de F et G ? Déterminer $F \cap G$. Conclure.

Exercice 15 : Soit $f \in \mathcal{L}(E; F)$. Montrer que : $Kerf \cap Imf = f(Ker(f^2))$.

Exercice 16 : Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que : $f(Ker(g \circ f)) = Kerg \cap Imf$.

Exercice 17 : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit G un supplémentaire de $Kerf$ dans E. Montrer que G et Imf sont isomorphes.

Exercice 18 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et soient A et B deux s.e.v de E.

Montrer que : $f(A) \subset f(B) \Leftrightarrow A + Kerf \subset B + Kerf$.

2.6 Solutions

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+y+z \\ x-2y+z \end{pmatrix}.$$

1. Soient $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, et soient λ et μ deux réels.

$$f(\lambda u + \mu v) = f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') \\ (\lambda x + \mu x') - 2(\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda(-2x+y+z) + \mu(-2x'+y'+z') \\ \lambda(x-2y+z) + \mu(x'-2y'+z') \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} -2x+y+z \\ x-2y+z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2x'+y'+z' \\ x'-2y'+z' \end{pmatrix}$$

$$= \lambda f(u) + \mu f(v).$$

D'où f est linéaire.

2. $Ker f = \{u \in \mathbb{R}^3 ; f(u) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$.

$$f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2x+y+z \\ x-2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{x = z \quad \text{et} \quad y = z\},$$

et par suite : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$ker f = \{u \in \mathbb{R}^3; u = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad z \in \mathbb{R}\}.$$

Donc base de $ker f$ est $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, et $dim(ker(f)) = 1$.

- $dim(Im(f))$, on a d'après théorème du rang

$$dim(\mathbb{R}^3) = 3 = dim(Im f) + dim(ker(f))$$

Et par suite : $dim(Im(f)) = 2$.

- Base de $Im(f)$, comme $dim(Im(f)) = 2 = dim\mathbb{R}^2$ et comme $Im(f)$ un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ alors nécessairement $Im(f) = \mathbb{R}^2$ et donc la base canonique $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base $Im(f)$.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par : $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -3x + 3y \end{pmatrix}$.

1. Soient $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, et soient λ et μ deux réels.

$$f(\lambda u + \mu v) = f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') \\ -3(\lambda x + \mu x') + 3(\lambda y + \mu y') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda(x - y) + \mu(x' - y') \\ \lambda(-3x + 3y) + \mu(-3x' + 3y') \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} x - y \\ -3x + 3y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x' - y' \\ -3x' + 3y' \end{pmatrix}$$

$$= \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Donc f est linéaire.

2. $Kerf = \{u \in \mathbb{R}^2; f(u) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$.

$$f(u) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x - y \\ -3x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{x = y\}$$

et par suite : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$kerf = \{u \in \mathbb{R}^2; u = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad x \in \mathbb{R}\}.$$

Donc base de $kerf$ est $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, et $dim(ker(f)) = 1$.

3. Montrons que f est ni injective ni surjective.

Remarquons que :

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mais $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où f n'est pas injective.

On remarque aussi que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas un antécédent car

$$\begin{cases} x - y &= 1 \\ -3x + 3y &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= y \\ 0 &= 1 \end{cases} \rightarrow \text{impossible}$$

d'où f n'est pas surjective.

Exercice 3 : Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On définit f l'application de E dans lui-même par

$$f(P) = P + (1 - X)P'$$

1. Soient $P \in E$ et $Q \in E$, et soient λ et μ deux réels.

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda P+\mu Q) & = & (\lambda P+\mu Q)+(1-x)(\lambda P+\mu Q)' \\ & = & \lambda P+\mu Q+(1-x)(\lambda P)'+(1-x)(\mu Q)' \\ & = & \lambda P+(1-x)\lambda P'+\mu Q+(1-x)\mu Q' \\ & = & \lambda(P+(1-x)P')+\mu(Q+(1-x)Q') \\ & = & \lambda f(P)+\mu f(Q). \end{array}$$

Donc f est linéaire et puisque $f : E \to E$, alors f est un endomorphisme de E.

2. Base de Imf.

$$\begin{array}{rcl} Im(f) & = & \{f(P)/P \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ & = & \{f(aX^3+bX^2+cX+d)/a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{af(X^3)+bf(X^2)+cf(X)+df(1)/a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{a(-2X^3+3X^2)+b(-X^2+2X)+c+d/a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\ & = & vect\{\underbrace{(-2X^3+3X^2)}_{P_0},\underbrace{(-X^2+2X)}_{P_1},\underbrace{1}_{P_2}\} \end{array}$$

Montrons que cette famille est libre

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 P_0+\lambda_2 P_1+\lambda_3 P_2 = 0_{\mathbb{R}_3[X]} & \Rightarrow & \lambda_1(-2X^3+3X^2)+\lambda_2(-X^2+2X)+\lambda_3(1) = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \\ & \Rightarrow & -2\lambda_1 X^3+(3\lambda_1-\lambda_2)X^2+2\lambda_2 X+\lambda_3 = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \\ & \Rightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} -2\lambda_1 & = & 0 \\ 3\lambda_1-\lambda_2 & = & 0 \\ 2\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \end{array}$$

D'où la famille est libre et $B = \{(-2X^3+3X^2),(-X^2+2X),1\}$ base de $Im(f)$, $dim(Im(f)) = 3 = rg(f)$

3. Base de $ker f$.

$$
\begin{aligned}
ker(f) &= \{P \in \mathbb{R}_3[X]/f(P) = 0_E\}\\
&= \{P \in \mathbb{R}_3[X]/f(aX^3 + bX^2 + cX + d) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}\}\\
&= \{P \in \mathbb{R}_3[X]/a(-2X^3 + 3X^2) + b(-X^2 + 2X) + c + d = 0_{\mathbb{R}_3[X]}\}\\
&= \{P \in \mathbb{R}_3[X]/ - 2aX^3 + (3a - b)X^2 + 2bX + c + d = 0_{\mathbb{R}_3[X]}\}\\
&= \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X]/ \left\{ \begin{array}{c} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -d \end{array} \right. \right\}\\
&= \{-dX + d/d \in \mathbb{R}\}\\
&= vect\{(-X + 1)\}.
\end{aligned}
$$

Cette famille contient un seul élément donc elle est libre et $B = \{(-X + 1)\}$ base de $ker f$, $dim(ker(f)) = 1$.

Exercice 4 : Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3, f(e_3) = 4e_1 + e_2 + 4e_3$.

1. L'expression de $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ où $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ donc

$$
\begin{aligned}
f(u) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3)\\
&= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \quad \text{car } f \text{ est linéaire}\\
&= x(e_1 + e_2 + e_3) + y(2e_1 - e_2 + 2e_3) + z(4e_1 + 2e_2 + 4e_3)\\
&= (x + 2y + 4z)e_1 + (x - y + z)e_2 + (x + 2y + 4z)e_3\\
&= \begin{pmatrix} x + 2y + 4z \\ x - y + z \\ x + 2y + 4z \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2. Calculons $f(e_1+2e_2), f^2(e_1), f^2(e_2), f^2(e_3)$, où $f^2 = f\circ f$.

$$\begin{aligned}
f(e_1+2e_2) &= f(e_1)+2f(e_2)\\
&= e_1+e_2+e_3+4e_1-2e_2+4e_3\\
&= 5e_1-e_2+5e_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^2(e_1)=f(f(e_1)) &= f(e_1+e_2+e_3)=f(e_1)+f(e_2)+f(e_3)\\
&= e_1+e_2+e_3+2e_1-e_2+2e_3+4e_1+e_2+4e_3\\
&= 7e_1+e_2+7e_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^2(e_2)=f(f(e_2)) &= f(2e_1-e_2+2e_3)=2f(e_1)-f(e_2)+2f(e_3)\\
&= 2(e_1+e_2+e_3)-(2e_1-e_2+2e_3)+2(4e_1+e_2+4e_3)\\
&= 8e_1+5e_2+8e_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^2(e_3)=f(f(e_3)) &= f(4e_1+e_2+4e_3)=4f(e_1)+f(e_2)+4f(e_3)\\
&= 4(e_1+e_2+e_3)+(2e_1-e_2+2e_3)+4(4e_1+e_2+4e_3)\\
&= 22e_1+7e_2+22e_3
\end{aligned}$$

3. Le noyau et l'image de l'application f.

$$\begin{aligned}
Ker f &= \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / f\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \right\}\\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{r} x+2y+4z=0\\ x-y+z=0\\ x+2y+4z=0 \end{array} \right\}\\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{l} y=-z\\ x=-2z \end{array} \right\}\\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -2z\\ -z\\ z\end{pmatrix} / z\in\mathbb{R} \right\} = vect\left\{ \begin{pmatrix} -2\\ -1\\ 1\end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Donc base de $kerf$ est $B = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, et $dim(ker(f)) = 1$.

- $dim(Im(f))$, on a d'après théorème du rang

$$dim(\mathbb{R}^3) = 3 = dim(Imf) + dim(ker(f))$$

Et par suite : $dim(Im(f)) = 2$.

- Base de $Im(f)$

$Imf = vect\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ où

$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $f(e_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On remarque que $f(e_3) = 2f(e_1) + f(e_2)$, alors $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ base de $Im(f)$, $dim(Im(f)) = 2$

4. Soit $X \in ker(f) \cap Im(f)$ alors $X \in ker(f)$ et $X \in Im(f)$, donc

$X \in ker(f) \Rightarrow X = \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$X \in Im(f) \Rightarrow X = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Alors

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta &= -2\gamma \\ \alpha - \beta &= -\gamma \\ \alpha + 2\beta &= \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{cases}$$

Donc $X = 0_{\mathbb{R}^3}$, ce qui implique que $ker(f) \cap Im(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et on a $dim\mathbb{R}^3 = 3 = dim(ker(f)) + dim(Im(f))$, alors $ker(f)$ et $Im(f)$ sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires.

Exercice 5 : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrons que les assertions suivantes sont équivalentes

1. $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$.
2. $Ker(f) = Ker(f \circ f)$.

1. Supposons que $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$ et montrons que $Ker(f) = Ker(f \circ f)$.
   -"$\subset$" : Si $x \in ker(f)$ alors $f(x) = 0_E$, donc $f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$ (car f est linéaire), alors $f \circ f(x) = 0_E$. Ce qui implique que $x \in ker(f \circ f)$. Cela montre que $ker(f) \subset ker(f \circ f)$.
   -"$\supset$" : Si $x \in ker(f \circ f)$ alors $f \circ f(x) = 0_E$, donc $f(f(x)) = 0_E$ (posons $y = f(x)$) alors $f(y) = 0_E$ ce qui implique que $y \in Im(f)$ et $y \in ker(f)$, alors $y \in Im(f) \cap ker(f)$, d'après (1) on a $y = 0_E$ et donc $f(x) = 0_E$ ce qui signifie $x \in ker(f)$. Cela montre que $ker(f \circ f) \subset ker(f)$.
   D'où l'égalité $ker(f) = ker(f \circ f)$.
2. Supposons que $Kerf = Ker(f \circ f)$ et montrons que $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$.
   Soit $y \in Ker(f) \cap Im(f)$ alors $y \in Im(f)$ et $y \in ker(f)$ donc il existe $x \in E, y = f(x)$ et $f(y) = 0_E$, alors $f(f(x)) = 0_E$ donc $f \circ f(x) = 0_E$, ce qui implique $x \in ker(f \circ f)$, et d'après (2) $x \in ker(f)$, donc $y = 0_E$. Cela montre que $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$.

Exercice 6 : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrons que : $Kerf = Imf \Leftrightarrow f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad et \quad n = 2.rg(f)$.

1. Supposons que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $n = 2.rg(f)$ et montrons que $Ker(f) = Im(f)$.
   Soit $y \in Im(f)$ donc il existe $x \in E, y = f(x)$, alors $f(y) = f(f(x)) = f \circ f(x) = 0_E$, ce qui implique que $y \in ker(f)$ et donc $Im(f) \subset ker(f)$.

Et d'après théorème du rang on a $dimE = dimker(f) + dimIm(f)$ et donc $dimker(f) = n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$. On a $Im(f) \subset ker(f)$ et les deux sous espaces ont la même dimension alors ils sont égaux.

2. Supposons que $Kerf = Imf$ et montrons que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $n = 2.rg(f)$. D'après théorème du rang on a $dimE = dimker(f) + dimIm(f)$ et puisque on a $ker(f) = Im(f)$ alors $dimker(f) = dimIm(f)$, donc $2dimIm(f) = n$, ce qui implique que $dimIm(f) = \frac{n}{2}$. Et pour tout $x \in E, f(x) \in Im(f)$ donc $f(x) \in ker(f)$ et $f(f(x)) = 0$, cela montre que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 7 : Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $G \in \mathcal{L}(F, G)$. montrons que

$$g \circ f = 0 \Leftrightarrow Im(f) \subset Ker(g).$$

-"$\Rightarrow$" : Supposons que $g \circ f = 0$ et montrons que $Imf \subset Kerg$.
Soit $y \in Im(f)$ alors il existe $x \in E, y = f(x)$, donc $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = 0$, ce qui implique que $y \in ker(g)$. D'où $Im(f) \subset Ker(g)$.
-"$\Leftarrow$" : Supposons que $Im(f) \subset Ker(g)$ et montrons que $g \circ f = 0$.
Soit $y \in Im(f)$ donc il existe $x \in E, y = f(x)$ or on a $y \in ker(g)$ car $Im(f) \subset ker(g)$, alors $g(y) = g(f(x)) = 0$. D'où $g \circ f(x) = 0$.

Exercice 8 : La forme linéaire f est donnée par $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha x + \beta y + \gamma z$, donc

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha + \beta + \gamma = 0, f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\alpha + \gamma = 1, f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha + 2\beta + 3\gamma = 4.$$

Alors on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha + \beta + \gamma & = & 0 \\ 2\alpha + \gamma & = & 1 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma & = & 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & -1 \\ \beta & = & -2 \\ \gamma & = & 3 \end{array}\right. .$$

Donc $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -x - 2y + 3z.$

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y+z \\ z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculons $Kerf$ et Imf.

$$\begin{aligned}
Kerf &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{rcl} 2y+z &=& 0 \\ z &=& 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{c} z=0 \\ y=0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} \\
&= vect\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad dim(ker(f)) = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Im(f) &= \left\{ f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 2y+z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} / y, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ y\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} / y, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= vect\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, dim(Im(f)) = 2
\end{aligned}$$

2. Calculons $f^2 = f \circ f$ puis $Kerf^2$ et Imf^2.

$$\begin{aligned}
f^2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= f\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \\
&= f\begin{pmatrix} 2y+z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ker(f^2) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \ 2z = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} / x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} / x, y \in \mathbb{R} \right\} \\
&= vect\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad dim(ker(f^2)) = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Im(f^2) &= \left\{ f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} / y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= vect\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad dim(Im(f^2)) = 1 \end{aligned}$$

3. Montrons que f est nilpotente.

   Remarquons que

$$\begin{aligned} f^3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= f\left(f^2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \\ &= f\begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Alors f est nilpotente et l'indice de nilpotence égale à 3

Exercice 10 : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrons que : $Imf = Imf^2 \Leftrightarrow E = Kerf + Imf$.

1. Supposons que $Imf = Imf^2$ et montrons que $E = Kerf + Imf$

   Soit $y \in E$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et $y = f^2(x)$ car $Imf = Imf^2$, donc $f(x) = f^2(x)$ alors $f(x) - f^2(x) = 0$, ce qui implique que $f(x - f(x)) = 0$, d'où $x - f(x) \in ker(f)$.

   Posons $b = x - f(x)$ tel que $b \in ker(f)$, alors $x = f(x) + b$

On a $x \in E$ et $f(x) \in Im(f)$ et $b \in ker(f)$, donc $E = Im(f) + ker(f)$.

2. Supposons que $E = kerf + Imf$ et montrons que $Im(f) = Im(f^2)$ On a toujours $Imf^2 \subset Imf$ car

$$\begin{aligned} y \in Imf^2 &\Rightarrow \exists x \in E, tq \quad y = f^2(x) \\ &\Rightarrow y = f(f(x)) \Rightarrow \exists f(x) \in E, tq \quad y = f(f(x)) \\ &\Rightarrow y \in Imf \end{aligned}$$

Donc pour montrer que $Imf = Imf^2$ il suffit de montrer que $Imf \subset Imf^2$. Soit $y \in Imf$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, puisque $E = kerf + Imf$ alors il existe $a \in E$ et $b \in ker(f)$ tq $x = f(a) + b$, donc $f(x) = f(f(a) + b)$ ce qui implique que $y = f(x) = f^2(a) + \underbrace{f(b)}_{=0}$ alors $y = f^2(a)$, donc $y \in Im(f^2)$.

D'où $Imf \subset Imf^2$

Si de plus E est de dimension finie alors d'après théorème du rang on a $dimE = dimIm(f) + dimker(f)$, donc $Imf = Imf^2 \Leftrightarrow E = Kerf \oplus Imf$.

Exercice 11 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions finies

1. Montrons que si f est surjective alors $dimE \geq dimF$.

   Soit f est surjective alors $Im(f) = F$, par conséquent $dimIm(f) = dimF$, et d'après théorème du rang $dimker(f) + dimIm(f) = dim(E) \Leftrightarrow dimker(f) + dimF = dimE$, ce qui donne que $dimker(f) = dimE - dimF \geq 0$, d'où $dimE \geq dimF$

2. Montrons que si f est injective alors $dimE \leq dimF$.

   Soit f est injective alors $kerf = \{0_E\}$, donc $dim(kerf) = 0$ et comme $Imf \subset F$ alors $dimImf \leq dimF$, et d'après théorème du rang $dimker(f) + dimIm(f) = dim(E) \Rightarrow dimImf = dimE$, ce qui implique que $dimE \leq dimF$.

Chapitre 3

Matrices

3.1 Définitions

Définition 3.1.1. *Soient n et m deux entiers naturels non nuls.*
Une matrice est une application

$$\begin{array}{rcccl} A & : & \{1,2,...,n\} \times \{1,2,...,m\} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & (i,j) & \longmapsto & a_{ij} \end{array}$$

Une matrice A de type (n,m) sur $\mathbb{K}$ peut-être représenter par un tableau à n lignes et m colonnes constitue d'éléments appartenant au corps $\mathbb{K}$ organisé comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

On la note aussi $A = (a_{ij})_{1\leq j\leq m}^{1\leq i\leq n}$, où $a_{ij} \in \mathbb{K}$ est l'élément correspondant à la i-ème ligne et à la j- ème colonne du tableau.
On note $\underset{n,m}{M}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices rectangulaires à n lignes et m colonnes et

à coefficients dans $\mathbb{K}$. Dans le cas particulier où $n = m$ on note $M_n(\mathbb{K}) = M_{n,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrice carrées d'ordre n.
On appelle diagonale principale d'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ d'ordre n le n-uplet $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) \in \mathbb{K}^n$.
Si $m = 1$ alors $A \in \underset{n,1}{M}(\mathbb{K})$ est appelée matrice-colonne (vecteur-colonne).
Si $n = 1$ alors $A \in \underset{1,m}{M}(\mathbb{K})$ est appelée matrice-ligne (vecteur-ligne).

Exemples 3.1.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *c'est une matrice carrée d'ordre* 2 *sur* $\mathbb{R}$*, de diagonale principale* $(2, 1) \in \mathbb{R}^2$.
$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & i & -1 \\ 5-i & 4 & 5-i \end{pmatrix}$ *c'est une matrice rectangulaire du type* $(2, 3)$ *sur* $\mathbb{C}$.
$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ *c'est une matrice-colonne de type* $(2, 1)$.
$A = \begin{pmatrix} -2 & 1/2 & \sqrt{3} & -i \end{pmatrix}$ *c'est une matrice-ligne de type* $(1, 3)$.
On note $\underset{M_{n,m}}{0}$ *la matrice rectangulaire de type* (n, m) *dont tous les coefficients sont nuls (matrice nulle de* $\underset{n,m}{M}(\mathbb{K})$*).*
On note In *la matrice carrée d'ordre n (matrice identité) donnée par :*

$$In = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 *et les autres coefficients égaux à zéro.*
On écrit aussi : $In = (\delta_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *ou* δ_{ij} *est le symbole de* ***Kronecker*** *défini pour tout*

$i \in \{1,\dots,n\}$ et pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, par $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$.

Remarque 3.1.1. *Soient* $A = (a_{ij})_{j=1,\dots,m}^{i=1,\dots,n}$ *et* $B = (b_{ij})_{j=1,\dots,m}^{i=1,\dots,n}$ *deux matrices de même type* (n,m) *sur* $\mathbb{K}$*. Par définition de l'égalité d'applications, on a*
$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ *pour tout* $i \in \{1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,m\}$.

Définition 3.1.2. *Soit* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans* $\mathbb{K}$*. On dit que A est diagonale si tous ses coefficients situés en dehors de la diagonale principale sont nuls, c'est-à-dire :* $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} \ \ (i \neq j) \Rightarrow (a_{ij} = 0)$
On dit que A est triangulaire supérieur si
$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} \ \ (i > j) \Rightarrow (a_{ij} = 0)$
On dit que A est triangulaire inférieure si
$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2 \ \ (i < j) \Rightarrow (a_{ij} = 0)$

Exemples 3.1.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ *est une matrice diagonale de* $M_3(\mathbb{R})$.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ *est une matrice triangulaire supérieure.*

$A = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ *est une matrice triangulaire inférieure.*

3.2 Opérations sur les matrices

Définition 3.2.1. *Soient* $A = (a_{ij})_{1\leq j\leq m}^{1\leq i\leq n}$ *et* $B = (b_{ij})_{1\leq j\leq m}^{1\leq i\leq n}$ *deux matrices de même type* (n,m) *sur* $\mathbb{K}$. *On appelle somme de* A *et* B *et on note* $A+B$, *la matrice de type* (n,m) *sur* $\mathbb{K}$ *définie par :*

$$A + B = (a_{ij} \underset{\mathbb{K}}{+} b_{ij})_{1\leq j\leq m}^{1\leq i\leq n}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. *On appelle produit de* A *par* α *et on note* $\alpha \cdot A$. *Où* αA, *la matrice de type* (n,m) *sur* $\mathbb{K}$ *définie par :*

$$\alpha \cdot A = (\alpha \underset{\mathbb{K}}{\cdot} a_{ij})_{1\leq j\leq m}^{1\leq i\leq n}$$

3.2.1 Structure d'espace vectoriel sur $\underset{n,m}{M}(\mathbb{K})$

L'ensemble $\underset{n,m}{M}(\mathbb{K})$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
Remarquons que si $A = (a_{ij})_{1\leq j\leq m}^{1\leq i\leq n} \in \underset{n,m}{M}(\mathbb{K})$ alors

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}E^{(i,j)}$$

Où la matrice $E^{(i,j)}$ design la matrice de $\underset{n,m}{M}(\mathbb{K})$ dont tous les termes sont nuls a l'exception du terme placé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne, qui vaut $\underset{\mathbb{K}}{1}$.
Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc les matrices $\{E^{(i,j)}\}$ engendrent ainsi $\underset{n,m}{M}(\mathbb{K})$, elles forment une famille libre d'où $\underset{M_{n,m}(\mathbb{K})}{B} = \{E^{(i,j)}\}_{1\leq j\leq m}^{1\leq i\leq n}$ est une base de $\underset{n,m}{M}(\mathbb{K})$ et $dim\, \underset{n,m}{M}(\mathbb{K}) = n \times m$.
Les coefficients a_{ij} est donc les coordonnées de A par rapport à $E^{(i,j)}$.

3.2.2 Produit matriciel

Soient $A = (a_{ij})_{1\leq j\leq m}^{1\leq i\leq n}$ une matrice de type (n, m) sur $\mathbb{K}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq j\leq p}^{1\leq i\leq m}$ une matrice de type (m, p) sur $\mathbb{K}$. On appelle produit de A et B, et que l'on note $A \times B$, la matrice $A \times B = (c_{ij})_{1\leq j\leq p}^{1\leq i\leq n}$ où $c_{ij} = \sum_{\varepsilon=1}^{m} a_{i\varepsilon} b_{\varepsilon j}$, pour tous $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$.

Remarque 3.2.1. *Le produit $A \times B$ n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.*
On retiendra le schéma suivant :

$$\underset{(n,m)}{A} \times \underset{(m,p)}{B} = \underset{(n,p)}{C}$$

Exemples 3.2.1. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1 & 2 \\ -i & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ *, on a*

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 4i \\ 2+2i & i+4 \\ i & 7 \end{pmatrix}$$

Proposition 3.2.1. *Soient n, p, q, m quatre entiers naturels non nuls.*
-Pour tout A de $\underset{n,p}{M}(\mathbb{K})$ et pour tous B, C de $\underset{p,q}{M}(\mathbb{K})$

$$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$$

-Pour tous B, C de $\underset{n,p}{M}(\mathbb{K})$ et pour A de $\underset{p,q}{M}(\mathbb{K})$

$$(B + C) \times A = (B \times A) + (C \times A)$$

-Pour tout A de $\underset{n,p}{M}(\mathbb{K})$, pour tout B de $\underset{p,q}{M}(\mathbb{K})$ et pour tout C de $\underset{q,m}{M}(\mathbb{K})$

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

Démonstration. Chacune des démonstrations est longue mais ne présente pas de difficulté. Elle utilise principalement la distributivité de $*_{\mathbb{K}}$ sur $+_{\mathbb{K}}$. $\square$

3.2.3 Transposition de matrices

Définition 3.2.2. *Soit A une matrice de type (n,m) sur $\mathbb{K}$. On appelle matrice transposé de A et on note A^t (ou parfois ${}^tA$), la matrice de type (m,n) sur $\mathbb{K}$ obtenu à partir de A en échangent les lignes et les colonnes.*

Exemples 3.2.2. *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, *alors* ${}^tA = A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Si $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, *alors* $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, *alors* $A^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Proposition 3.2.2. *Soient n, m, p trois entiers naturels non nuls.*

1. $\forall A \in \underset{n,m}{M}(\mathbb{K})\ ;\ (A^t)^t = A$
2. $\forall A, B \in \underset{n,m}{M}(\mathbb{K})\ ;\ (A+B)^t = A^t + B^t$
3. $\forall A \in \underset{n,m}{M}(\mathbb{K})\ ;\ (\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$
4. $\forall A \in \underset{n,p}{M}(\mathbb{K})\ ,\ \forall B \in \underset{p,m}{M}(\mathbb{K})\ ;\ (A \times B)^t = {}^tB \times {}^tA$

Définition 3.2.3. *Soit A une matrice carrée d'ordre n sur $\mathbb{K}$.*
-On dit que A est une matrice symétrique si $A^t = A$.

-On dit que A est une matrice antisymétrique (ou alternée) si $A^t = -A$.
De même $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ *est antisymétrique lorsque*
$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2 \; ; \; a_{ji} = -a_{ij}$.

Exemples 3.2.3. *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ *de* $\underset{3}{M}(\mathbb{R})$ *est symétrique, tandis que la matrice* $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ *de* $\underset{3}{M}(\mathbb{R})$ *est antisymétrique.*

3.2.4 Sous-espaces supplémentaires dans $\underset{n}{M}(\mathbb{K})$

Toute matrice carrée peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, en effet $\forall A \in \underset{n}{M}(\mathbb{K})$

$$A = \underbrace{1/2\,(A + A^t)}_{\text{symétrique}} + \underbrace{1/2\,(A - A^t)}_{\text{antisymétrique}}$$

Désignons par $\underset{n}{S}(\mathbb{K})$ (respectivement $\underset{n}{A}(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétrique (respectivement antisymétrique) d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Ces deux ensembles constituent deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\underset{n}{M}(\mathbb{K})$.
On a $\underset{n}{S}(\mathbb{K}) \cap \underset{n}{A}(\mathbb{K}) = \{ \underset{M_n(\mathbb{K})}{0} \}$ car la seule matrice qui est à la fois symétrique et antisymétrique est la matrice nulle donc : $\underset{n}{S}(\mathbb{K}) \oplus \underset{n}{A}(\mathbb{K}) = \underset{n}{M}(\mathbb{K})$.

3.2.5 structure d'anneau sur $\underset{n}{M}(\mathbb{K})$

L'ensemble $\underset{n}{M}(\mathbb{K})$ muni de l'addition et la multiplication de matrices est un anneau qui n'est pas commutatif (sauf si $n = 1$). En effet, Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$ $B \times A$

3.2.6 Puissance K-ième d'une matrice

Pour toute matrice $A \in \underset{n}{M}(\mathbb{K})$, on pose $A^0 = I_n$, et $\forall \varepsilon \in \mathbb{N}$

$$A^{\varepsilon} = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{\varepsilon - fois}, \quad A^{\varepsilon+1} = A^{\varepsilon} \times A$$

La matrice A^{ε} s'appelle puissance ε-ième de A.

Proposition 3.2.3. *Soit A une matrice carrée à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

1. $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{N}\ ,\ \forall\, \varepsilon' \in \mathbb{N}\ ;\ A^{\varepsilon} \times A^{\varepsilon'} = A^{\varepsilon+\varepsilon'}$
2. $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{N}\ ,\ \forall\, \varepsilon' \in \mathbb{N}\ ;\ (A^{\varepsilon})^{\varepsilon'} = A^{\varepsilon\times\varepsilon'}$
3. $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}\ ,\ \forall\, \varepsilon \in \mathbb{N}\ ;\ (\alpha.A)^{\varepsilon} = \alpha^{\varepsilon}.A^{\varepsilon}$

Remarque 3.2.2. *Si D est une matrice diagonale c'est-à-dire* $D = (a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ *alors, pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{N}\ ;\ D^{\varepsilon} = (a_{11}^{\varepsilon}, a_{22}^{\varepsilon}, \ldots, a_{nn}^{\varepsilon})$.

3.2.7 Formule du binôme de Newton dans l'anneau $(\underset{n}{M}(\mathbb{K}), +, \times)$

Soient $A, B \in \underset{n}{M}(\mathbb{K})$. Si $A \times B = B \times A$ alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$(A+B)^m = \sum_{\varepsilon=0}^{m} C_m^{\varepsilon}\, A^{m-\varepsilon}\, B^{\varepsilon}$$

où ,pour tout $\varepsilon \in \{0, \ldots, m\}$, le coefficient binomial est défini par : $C_m^{\varepsilon} = \frac{m!}{(m-\varepsilon)!\ \varepsilon!}$

3.3 Déterminant d'une matrice carrée

Par souci d'alléger ce cours, nous décidons de ne pas démontrer les résultats et les propositions que nous allons énoncer.

3.3.1 Déterminant d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$. On appelle déterminant de A et on note $det(A)$, le scalaire

$$det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Par convention, si $n = 1$ c'est-à-dire $A = (a_{11})$, alors $det(A) = a_{11}$.

3.3.2 Déterminant d'ordre 3

Soit A une matrice carrée d'ordre 3 a coefficient dans $\mathbb{K}$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$, on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice carrée d'ordre 2 obtenu en suppriment dans A la i-ème ligne et la j- ème colonne.

Exemples 3.3.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Delta_{1,1} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $\Delta_{1,2} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $\Delta_{1,3} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$,

$\Delta_{2,2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \ldots etc.$

Définition 3.3.1. *Soit $A \in M_3(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A et on note $det(A)$, le scalaire*

$$det(A) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, \Delta_{i,j}$$

où l'indice i prend une valeur quelconque entre 1 *et* 3.
On dit que l'on a développé le déterminant suivant la i-ème ligne. Par exemple, si on prend $i = 1$ alors

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j}\, a_{1j}\, \Delta_{1,j} \\ &= (-1)^{1+1}\, a_{11}\, \Delta_{1,1} + (-1)^{1+2}\, a_{12}\, \Delta_{1,2} + (-1)^{1+3}\, a_{13}\, \Delta_{1,3} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Exemples 3.3.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2(-1) - 6(-1) + 1(3) \\ &= 7 \end{aligned}$$

3.3.3 Déterminant d'ordre n

Un déterminant d'ordre n se décompose en une combinaison linéaire de n déterminant d'ordre $n-1$, ces derniers se décomposent chacun en une combinaison linéaire de $n-1$ déterminant d'ordre $n-2$, et ainsi de suite jusqu'à s'être ramené a l'ordre 3.

Proposition 3.3.1. *Pour tout $A \in \underset{n}{M}(\mathbb{K})$, $det(A^t) = det(A)$.*

3.3.4 Déterminant d'une matrice triangulaire

Proposition 3.3.2. *Le déterminant d'une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure) est égal au produit de ses coefficients diagonaux.*

Corollaire 3.3.1. *Une condition nécessaire et suffisants pour qu'une matrice triangulaire soit inversible est que ses coefficients diagonaux soient tous non nuls.*

Proposition 3.3.3. *Pour tous* $A, B \in \underset{n}{M}(\mathbb{K})$*, on a*
$det(A \times B) = det(A) \times det(B)$
En particulier, si A *est inversible alors* $det(A^{-1}) = 1/det(A)$

Propriétés de déterminant

1. Si tous les éléments d'une même rangée (ligne ou colonne) sont nuls alors le déterminant est nul.
2. Si l'on permute deux rangées du même type alors le déterminant change de signe.
3. Si l'on multiplie par $\alpha \in \mathbb{K}$ tous les éléments d'une même rangée alors le déterminant est multiplié par α. En particulier pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et pour tout $A \in \underset{n}{M}(\mathbb{K})$; $det(\alpha A) = \alpha^n \, det(A)$.
4. Si une rangée s'écrit comme une combinaison linéaire des autres rangées du même type alors son déterminant est nul. En particulier, si deux rangée parallèles son égales alors le déterminant est nul.
5. Le déterminant ne change pas lorsque l'on ajoute à une rangée une combinaison linéaire des rangées du même type, à l'exception de la rangée considérée.

Remarque 3.3.1. *Les propriétés du déterminant que nous venons d'énoncer sont très utiles dans les calculs. En effet, avant de procéder au développement par rapport à une colonne ou à une ligne, on a souvent intérêt à faire apparaitre le plus de zéros sur la ligne ou la colonne par rapport à laquelle on a choisi de développer.*

Exemples 3.3.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ *on développe par rapport à la deuxième ligne, on trouve*

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -5(16) = -80$$

Définition 3.3.2. *Soit $A \in \underset{n,m}{M}(\mathbb{K})$. On appelle déterminant d'ordre ε extrait de A tout déterminant d'une matrice carrée d'ordre ε déduite de A par suppression de $n - \varepsilon$ lignes et $m - \varepsilon$ colonnes.*

Proposition 3.3.4. *Soit $A \in \underset{n,m}{M}(\mathbb{K})$ non nulle. Le rang de A est le plus grand entier r tel qu'il existe un déterminant non nul d'ordre r extrait de A.*

3.4 Inverse d'une matrice

Proposition 3.4.1. *Pour qu'une matrice carrée soit inversible il faut et il suffit que son déterminant soit non nul. En d'autres termes, $A \in \underset{n}{GL}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow det(A) \neq 0$*
d'où $\underset{n}{GL}(\mathbb{K}) = \{A \in \underset{n}{M}(\mathbb{K}) |\ det(A) \neq 0\}$

3.4.1 Comatrice d'une matrice

Définition 3.4.1. *Soit $A \in \underset{n}{M}(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$.*
On appelle comatrice de A et on note $co(A)$, la matrice carrée d'ordre n définie par

$$co(A) = (c_{ij})_{i,j \in \{1,\dots,n\}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

tel que $c_{ij} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{i,j}$ *pour tout* $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ *où* $\Delta_{i,j}$ *est le déterminant d'ordre* $n-1$ *en supprimant la i-ème ligne et la j- colonne.*

Exemples 3.4.1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$co(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\Delta_{1,1} & -\Delta_{1,2} & +\Delta_{1,3} \\ -\Delta_{2,1} & +\Delta_{2,2} & -\Delta_{2,3} \\ +\Delta_{3,1} & -\Delta_{3,2} & +\Delta_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -12 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

3.4.2 Application au calcul de l'inverse d'une matrice carrée

Proposition 3.4.2. *Soit* $A \in \underset{n}{M}(\mathbb{K})$ *une matrice carrée d'ordre n. Si A est inversible alors* $A^{-1} = 1/det(A)\; {}^t co(A)$

3.5 Exercices

Exercice 1 : Considérons les matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si elles ont un sens, calculer les matrices AB, BA, CD, DC, AE, CE.

Exercice 2 : On Considère les deux matrices A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 + A - 2I_3, B^3 - 3B + I_3$.
2. En déduire que les deux matrices A et B sont inversibles et donner leurs inverses.

Exercice 3 : Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^tA. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, quel est son inverse ?

Exercices supplémentaires

Exercice 4 : On considère les matrices à coefficients réels :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer s'ils ont un sens les produits $AB, BA, AC, CA, BC, CB, B^2$.
2. En déduire, sans plus de calcul, que A et C sont inversibles et préciser leurs inverses.

Exercice 5 : On Considère les deux matrices P et Q définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, Q = \frac{1}{4}(I + P)$$

1. Calculer P^2, PQ, QP en fonction de P.

2. Calculer $(4I_3 - P)Q, Q(4I_3 - P)$, que peut-on déduire ?

Exercice 6 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2, A^3, A^3 - A^2 + A - I_3$.

2. Exprimer A^{-1} et A^4 en fonction de A^2, A et I_3.

Exercice 7 : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $(A - 2I_3)^3$, puis en déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de A^2, A et I_3.

Exercice 8 : On considère $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - I_n = 0_n$. 0_n est la matrice nulle dans $M_n(\mathbb{R})$

1. Exprimer $(A + I_n)^3$ en fonction de A.

2. En déduire que $(A + I_n)$ est inversible (on exprimera $(A + I_n)^{-1}$ en fonction de A).

Exercice 9 : Calculer par la méthode de Gauss l'inverse des matrices suivantes, lorsqu'elle existe :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 : Dans $M_3(\mathbb{R})$, on considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = A + 3I_3.$$

1. Exprimer B^2 en fonction de B.
2. En déduire A^2 en fonction de A.
3. La matrice A est-elle inversible ?

Exercice 11 : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = 2A + 3B$. Calculer $(A - 3I_n)(B - 2I_n)$ en déduire que $AB = BA$.
-Existe-t-il des matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB - BA = I_n$

3.6 Solutions

Exercice 1 :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}.$$

Rq : Le produit matriciel n'est pas commutatif en générale.

$$CD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$DC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$AE = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le produit CE n'a pas de sens.

Exercice 2 : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1- $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A^2 + A - 2I_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2.B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 12 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
B^3 - 3B + I_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 12 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -9 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2- On a

$$
\begin{aligned}
A^2 + A - 2I_3 = 0 &\Rightarrow A^2 + A = 2I_3 \\
&\Rightarrow \tfrac{1}{2}(A^2 + A) = I_3 \\
&\Rightarrow \tfrac{1}{2}A^2 + \tfrac{1}{2}A = I_3 \\
&\Rightarrow A(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}I_3) = (\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}I_3)A = I_3
\end{aligned}
$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_3$

On a

$$
B^3 - 3B + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B + 2I_3
$$

$$
\begin{aligned}
B^3 - 3B + I_3 = B + 2I_3 &\Rightarrow B^3 - 3B + I_3 - B - 2I_3 = 0 \\
&\Rightarrow B^3 - 4B = I_3 \\
&\Rightarrow B(B^2 - 4I_3) = (B^2 - 4I_3)B = I_3
\end{aligned}
$$

Donc B est inversible et $B^{-1} = B^2 - 4I_3$.

Exercice 3 : Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
A^t.A = A.A^t &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = A^t = A$

Chapitre 4

Matrices et applications linéaires

4.1 Matrices des applications linéaires

4.1.1 Écriture matricielle d'une application linéaire

Définition 4.1.1. *Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimensions finie m muni d'une base $B_E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$, F un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $B_F = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ et f une application linéaire de E dans F.*
On appelle matrice associée à f relativement à B_E et B_F la matrice de type (n, m), notée $M_{B_E,B_F}(f)$ ou $M(f, B_E, B_F)$, et définie par :

$$M_{B_E,B_F}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

telle que

$$\begin{cases} f(e_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + ... + a_{n1}f_n \\ f(e_2) = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + ... + a_{n2}f_n \\ \vdots \\ f(e_m) = a_{1m}f_1 + a_{2m}f_2 + ... + a_{nm}f_n \end{cases}$$

Exemple 4.1.1. ***1-*** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+4y \\ -y \end{pmatrix}$$

La matrice associée à f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M_{\xi_{\mathbb{R}^2},\xi_{\mathbb{R}^3}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Telle que

$$\xi_{\mathbb{R}^2} = \{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

$$\xi_{\mathbb{R}^3} = \{f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

On a :

$$f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1f_1 + 2f_2 + 0f_3 = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + a_{31}f_3$$

$$f(e_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = -1f_1 + 4f_2 + -1f_3 = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + a_{32}f_3$$

D'où $$M_{\xi_{\mathbb{R}^2},\xi_{\mathbb{R}^3}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2-*Soit* $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ *l'application définie par :*

$$f(P) = P + (X-1)P'$$

La matrice associée à f *relativement à la base canonique de* $\mathbb{R}_2[x]$ *est une matrice de type* $(3,3)$ *(carrée) ;* $\xi_{\mathbb{R}_2[x]} = \{1, X, X^2\}$

$$M_{\xi_{\mathbb{R}_2[x]}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{cases} f(1) = 1 = (1\times 1) + (0\times x) + (0\times x^2) = a_{11}1 + a_{21}x + a_{31}x^2 \\ f(x) = 2x - 1 = (-1\times 1) + (2\times x) + (0\times x^2) = a_{12}1 + a_{22}x + a_{32}x^2 \\ f(x^2) = x^2 + (x-1)2x = (0\times 1) + (-2\times x) + (3\times x^2) = a_{13}1 + a_{23}x + a_{33}x^2 \end{cases}$$

D'où $$M_{\xi_{\mathbb{R}_2[x]}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Remarque 4.1.1. *Soit* $f : E \to F$ *une application linéaire*

- La matrice associée à l'application linéaire f *dépend des bases choisies de* E *et de* F

La matrice associée à l'application identité de E *relativement à n'importe qu'elle base de* E *est la matrice identité d'ordre* n*. Autrement dit* $M_B(id_E) = I_n$*, pour tout base de* E

4.1.2 Écriture matricielle d'une égalité vectorielle

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie m muni d'une base $B_E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$. Soit $x \in E$ donc $x = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i e_i$.
On appelle matrice colonne X (vecteur colonne) associé au vecteur x la matrice de type $(m, 1)$ constitué des coordonnées $x_1, x_2, ..., x_m$ du vecteur x dans la base B_E. On le note parfois $M_{B_E}^{C}(x)$. Autrement dit

$$M_{B_E}^{C}(x) = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \text{ où } x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$$

Proposition 4.1.1. *Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie m muni d'une base B_E, F un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base B_F et f une application linéaire de E dans F, si $A = M_{B_E,B_F}(f)$ alors l'égalité vectorielle : $y = f(x)$ s'écrit, relativement au base B_E et B_F, sous la forme matricielle $Y = AX$ où X est la matrice colonne associée à X et Yest le vecteur colonne associé à Y.*

Exemple 4.1.2. *Soit A la matrice associée à l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[x]$ donnée par :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors
$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ & P & \longmapsto & Q = f(P) \end{array}$$

où $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$
l'écriture matricielle de légalité vectorielle $Q = f(P)$ est :

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où $\begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est le vecteur-colonne associée à* q*, d'où* $Q = f(P) = a_1 + 2a_2X = p'$.

Propriétés

Proposition 4.1.2. *Soient* E, F *deux* $\mathbb{K}-$*espaces vectoriels de dimensions finies,* B_E *une base de* E *et* B_F *une base de* F*, Si* f *et* g *sont deux applications linéaires de* E *vers* F*,* $\alpha \in \mathbb{K}$*, et* $\beta \in \mathbb{K}$ *alors*

$$M_{B_E,B_F}(\alpha f + \beta g) = \alpha M_{B_E,B_F}(f) + \beta M_{B_E,B_F}(g)$$

En particulier, si $E = F$ *et* $B_E = B_F = B$ *alors*

$$M_B(\alpha f + \beta g) = \alpha M_B(f) + \beta M_B(g), M_B(\alpha f) = \alpha M_B(f)$$

4.1.3 Isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $\mathbb{M}_{n,m}(K)$

Proposition 4.1.3. *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}-$*espaces vectoriels de dimensions respectives* m *et* n*. L'application*

$$\begin{array}{rcccc} Mat_{B_E,B_F} & : & \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) & \longrightarrow & M_{n,m}(\mathbb{K}) \\ & & f & \longmapsto & Mat_{B_E,B_F}(f), \end{array}$$

où B_E *est une base de* E *et* B_F *est une base de* F *est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Démonstration. Cette application est en effet injective puisque de l'égalité matricielle : $M_{B_E,B_F}(f_1) = M_{B_E,B_F}(f_2)$ où f_1 et f_2 dans $\mathcal{L}_K(E, F)$

il vient immédiatement $f_1(e_j) = f_2(e_j)$ pour tout $j \in \{1, 2, ..., m\}$ et donc $f_1(x) = f_2(x)$ pour tout $x \in E$.
Il est surjective puisque pour toute matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ il existe $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$ tel que $Mat_{B_E,B_F}(f) = A$. Il suffit de considérer l'application linéaire f définie par

$$\forall j \in \{1, 2, ..., m\} \quad f(e_j) \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$$

De plus d'après la proposition précédente, cette application définit un morphisme d'espace vectoriel $\mathcal{L}_K(E, F)$ dans $M_{n,m}(\mathbb{K})$.
C'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels $\square$

Remarque 4.1.2. *Cet isomorphisme dépend du choix des deux bases B_E et B_F, il n'est donc pas unique.*
Remarquons que $dim\mathcal{L}_K(E, F) = dimM_{n,m}(\mathbb{K}) = n \times m = dimE \times dimF$.

Proposition 4.1.4. *Soient E, F et G trois $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies. Soient B_E base de E, B_F base de F et B_G une base de G, si f est une application linéaire de E vers F et g de F vers G alors*

$$M_{B_E,B_G}(g \circ f) = M_{B_F,B_G}(g) \times M_{B_E,B_f}(f).$$

Conséquences : Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n muni d'une base B, f un endomorphisme de E et $A \in M_n(\mathbb{K})$, on vérifie, par récurrence sur $\mathbb{K}$ que si $A = M_B(f)$ alors A^ε avec $\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ est la matrice associée à f^ε relativement à B où on a noté
$A^\varepsilon = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{\varepsilon-fois}$ et $f^\varepsilon = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\varepsilon-fois}$

4.1.4 Rang d'une matrice rectangulaire

Définition 4.1.2. *Soit A une matrice de type (m, n) sur $\mathbb{K}$ on appelle rang de A, et on note rgA, le rang de la famille des n vecteurs correspondant aux colonnes de A, dans l'espace* *vectoriel $\mathbb{K}^m$. En d'autres termes,*

$$rgA = rg(c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

où, pour $j \in \{1, 2, ..., n\}$, c_j désigne le vecteurs de $\mathbb{K}^m$ dont les coordonnées dans la base canonique sont rangées dans la $j-$ème colonne de A

Exemple 4.1.3. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *alors* $c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
on les deux vecteurs c_1 et c_2 sont linéairement indépendants donc $rgA = 2$.

4.1.5 Isomorphisme entre $\mathbb{K}-$espace vectoriel E et $\mathbb{K}^n$

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $B_E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. Cet espace vectoriel est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ via l'isomorphisme

$$\begin{array}{cccc} \phi_{B_E} : & E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

un tel isomorphisme ϕ_{B_E} n'est pas unique car il est subordonné au choix de la base de B_E

Proposition 4.1.5. *Si A est une matrice de type (n, m) alors*

$$rgA \leq min\{m, n\}$$

Démonstration. Par définition $rgA = rg(c_1, c_2, \cdots, c_n) = dim_{\mathbb{K}}(vect(c_1, c_2, \cdots, c_n))$ donc on a d'une part $rg(c_1, c_2, \cdots, c_n) \leq n$ puisque les vecteurs $c_1, c_2, \cdots, c_n$

ne sont pas nécessairement linéairement indépendants et d'autre part $rg(c_1, c_2, \cdots, c_n) \leq m$ puisque $vect(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$, d'où

$$rgA \leq min\{m, n\}$$

□

Proposition 4.1.6. *Soit A une matrice rectangulaire, si f est une application linéaire de E dans F avec E un $\mathbb{K}-$espace muni d'une base B_E et F un $\mathbb{K}-$espace muni d'une base B_F, telle que $A = M_{B_E,B_F}(f)$ alors $rg(A) = rg(f)$*

Proposition 4.1.7. *Le rang d'une matrice A et celui de sa transposée sont égaux. Autrement dit : $rgA = rgA^t$.*

4.1.6 Matrices carrées inversibles $GL_n(\mathbb{K}) = GL(n, \mathbb{K})$

Définition 4.1.3. *Soit A une matrice carrée d'ordre n sur $\mathbb{K}$*
- On dit que A est inversible (régulière) s'il existe une matrice carré d'ordre n sur $\mathbb{K}$, notée A^{-1} est appelée matrice inverse de A, telle que $A^{-1} \times A = I_n$ et $A \times A^{-1} = I_n$.
On note $GL(n, \mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n.
- Lorsqu'une matrice carrée n'est pas inversible, on dit qu'elle est singulière.

Remarque 4.1.3. *Soit A une matrice carrée d'ordre n sur $\mathbb{K}$, s'il existe une matrice B d'ordre n sur $\mathbb{K}$ telle que $B \times A = I_n$ alors on peut en déduire directement que A est inversible, son inverse est alors la matrice B, et il n'est pas nécessairement dans ce cas-là de vérifier l'autre égalité, à savoir que $A \times B = I_n$.*

Propriétés

1. Si une matrice carrée A est inversible alors sa matrice inverse est elle-même inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. Si A et B sont deux matrices carrées inversibles du même ordre, alors la matrice $A \times B$ est inversible et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

3. Si une matrice carrée A est inversible alors sa matrice transposée est elle-même inversible et $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Démonstration. 1. Evident

2. On vérifie

$$\begin{aligned}(B^{-1} \times A^{-1}) \times (A \times B) &= B^{-1} \times (A^{-1} \times A) \times B \quad car \quad (\times) \quad est \quad associative \\ &= B^{-1} \times I_n \times B \quad car \quad A^{-1} \quad est \quad l'inverse \quad de \quad A \\ &= B^{-1} \times B = I_n \quad car \quad B^{-1} \quad est \quad l'inverse \quad de \quad B\end{aligned}$$

d'où $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

3. Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n, on a

$$\begin{aligned}A^{-1} \times A = I_n &\Rightarrow (A^{-1} \times A)^t = I_n^t = I_n \\ &\Rightarrow A^t \times (A^{-1})^t = I_n\end{aligned}$$

d'où A^t est inversible et $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

□

La matrice associée à une application linéaire bijective est-elle inversible ?

La réponse est oui d'après la propositions ci-dessous

Proposition 4.1.8. *Une application linéaire f sur $\mathbb{K}-$espace E de dimension finie dans un $\mathbb{K}-$espace F de même dimension est bijective si et seulement si, la matrice carrée associée à f relativement à des bases quelconques B_E de E et B_F de F, est inversible. Si f est bijective alors $(M_{B_E,B_F}(f))^{-1} = M_{B_F,B_E}(f^{-1})$*

Démonstration. $M_{B_E,B_F}(f) \times M_{B_F,B_E}(f^{-1}) = M_{B_E}(f \circ f^{-1}) = I_n$. □

Proposition 4.1.9. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit inversible et que son rang soit égale à son ordre. Autrement dit*

$$A \in GL(n, \mathbb{K}) \Leftrightarrow rgA = n$$

Démonstration. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n muni d'une base B, considérons l'endomorphisme f de E dont la matrice associée relativement à B est A.
On a donc

$$\begin{aligned} A \in GL(n, \mathbb{K}) &\Leftrightarrow f \quad est \quad bijective \\ &\Leftrightarrow rgf = n \\ &\Leftrightarrow rgA = n \end{aligned}$$

□

Exemple 4.1.4. *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est inversible car son rang est* 3

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *n'est pas inversible car son rang est* 1

Proposition 4.1.10. *Soit A une matrice de type (m, n) sur $\mathbb{K}$.*

1. *Si $B \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $rg(B \times A) = rgA$*
2. *Si $C \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $rg(A \times C) = rgA$*
3. *Si $B \in GL_n(\mathbb{K})$ et $C \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $rg(B \times A \times C) = rgA$.*

Démonstration. f bijective $\Rightarrow rg(f \circ g) = rg(g) = rg(g \circ f)$. □

4.2 Changement de bases

4.2.1 Matrice de passage :

Définition 4.2.1. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n et B_E, B'_E deux bases de E. On appelle matrice de passage de B_E à B'_E la matrice carrée d'ordre n dont la $j-$ème colonne est formées coordonnées dans B_E du $j-$ème vecteur de la base B'_E.*

Remarque 4.2.1. *Si $B_E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ et $B'_E = \{e'_1, e'_2, \cdots, e'_n\}$ la matrice de passage de B_E à B'_E est donc la matrice P définie par :*

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

C'est une matrice carrée d'ordre n.

Exemple 4.2.1. *On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de la base $B_{\mathbb{R}^3} = \{e_1, e_2, e_3\}$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de la base $B'_{\mathbb{R}^3} = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ où $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$*

La matrice de passage de $B_{\mathbb{R}^3}$ à $B'_{\mathbb{R}^3}$ est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice carrée d'ordre 3.

Propriétés des matrices de passage

Définition 4.2.2. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel muni des bases B_E et B'_E. La matrice de passage P de B_E à B'_E est la matrice représentant l'application $id_E : E \ni x \mapsto x \in E$ relativement aux bases B'_E et B_E. En d'autre termes $P = M_{B'_E,B_E}(id_E)$*

$$(E, B'_E) \xrightarrow{P} (E, B_E)$$

Remarque 4.2.2. *L'identité de E n'est pas la seule application linéaire que l'on peut associer à la matrice de passage P de B_E à B'_E. Considérons par exemple l'endomorphisme ϕ de E qui transforme B_E en B'_E, C-à-d l'unique endomorphisme de E qui vérifie : $\phi(e_i) = e'_i$ pour $i = 1 \cdots n$. Alors $P = M_{B_E}(\phi)$.*
La matrice de passage est inversible car est une matrice associée à une application linéaire bijective.

Proposition 4.2.1. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel muni des bases B_E et B'_E. Si P est la matrice de passage de B_E à B'_E alors P^{-1} est la matrice de passage de B'_E à B_E.*

Démonstration. Soit $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de B'_E à B_E C-à-d $Q = M_{B_E,B'_E}(id_E)$
Soit maintenant $P \in GL_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de B_E à B'_E c-à-d $P = M_{B'_E,B_E}(id_E)$.
Calculons $Q \times P$

$$\begin{aligned} Q \times P &= P = M_{B_E,B'_E}(id_E) \times M_{B'_E,B_E}(id_E) \\ &\Leftrightarrow M_{B'_E,B'_E}(id_E \circ id_E) = M_{B'_E}(id_E) = I_n \end{aligned}$$

Car la matrice associée à l'application identité relativement à n'importe quelle base est la matrice unité.
On en déduit directement que $P^{-1} = Q$. $\square$

4.2.2 Changement de bases pour un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n muni des deux bases $B_E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ (ancienne base) et $B'_E = \{e'_1, e'_2, \cdots, e'_n\}$ (nouvelle base). Soit $x \in E$ dont ces coordonnées par rapport à B_E (resp par rapport à B'_E) sont $(x_1, x_2, \cdots, x_n)_{B_E}$ (resp $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)_{B'_E}$).
La proposition si dessous nous donne les relations liant anciennes et nouvelles coordonnées du vecteur X.

Proposition 4.2.2. *Si X et X' désignes les matrices colonnes des coordonnées de x dans les bases respectivement B_E et B'_E et P est la matrice de passage de B_E à B'_E alors $X = PX'$*

Démonstration. -1ère Méthode :
on a $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ par rapport à la base B_E et

$$\begin{aligned} x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j \Leftrightarrow x &= \sum_{j=1}^{n} (x'_j \sum_{i=1}^{n} P_{ij} e_i \quad \text{car} \quad e'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} e_i \quad \forall j \in \{1, \cdots, n\} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} x'_j P_{ij} e_i) \quad \text{car} \quad x'_j \quad \text{ne dépend pas de } i \\ &= \sum_{i=1}^{n} [(\sum_{j=1}^{n} P_{ij} x'_j) e_i] \end{aligned}$$

D'où $\forall i \in \{1, \cdots, n\}, x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} P_{ij} x'_j$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} x_1 = p_{11} x'_1 + p_{12} x'_2 + \ldots + p_{1n} x'_n \\ x_2 = p_{21} x'_1 + p_{22} x'_2 + \ldots + p_{2n} x'_n \\ \vdots \\ x_n = p_{n1} x'_1 + a_{n2} x'_2 + \ldots + p_{nn} x'_n \end{cases}$$

Ou encore, sous une forme matricielle plus compacte

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

-2ème méthode :

D'une manière plus concise,

$$\begin{array}{rcccc} id_E & : & (E, B'_E) & \longrightarrow & (E, B_E) \\ & & x & \longmapsto & id_E(x) = x \end{array}$$

On sait que la matrice associée à id_E est la matrice de passage P, en utilisant l'écriture matricielle, on a l'équivalence suivante :

$$x = id_E(x) \Leftrightarrow X = PX'$$

□

Exemple 4.2.2. *Soit* $\mathbb{R}^3$ *muni de la base canonique* $B_{\mathbb{R}^3} = \{e_1, e_2, e_3\}$ *et de la base* $B'_{\mathbb{R}^3} = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ *avec* $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *considérons le vecteur* $x \in \mathbb{R}^3$ *dont les coordonnées par rapport à* $B_{\mathbb{R}^3}$ *sont* $\begin{pmatrix} 3, 6, 9 \end{pmatrix}_{B_{\mathbb{R}^3}}$.

On cherche les coordonnées de x par rapport à $B'_{\mathbb{R}^3}$.

$$\begin{aligned}
X = PX' \quad &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}}_{X'} = \frac{1}{3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}}_{X} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x'_1 = -3 \\ x'_2 = 0 \\ x'_3 = 6 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc les coordonnées de x par rapport à $B'_{\mathbb{R}^3}$ *sont* $\begin{pmatrix} -3, 0, 6 \end{pmatrix}_{B'_{\mathbb{R}^3}}$.

4.2.3 Effet d'un changement de bases pour une application linéaire

Théorème 4.2.1. *Soient E un espace vectoriel muni des deux bases B_E et B'_E, F un espace vectoriel muni des deux bases B_F et B'_F. Soit f une application linéaire de E dans F. Alors les deux matrices $A = M_{B_E,B_F}(f)$ et $B = M_{B'_E,B'_F}(f)$, toutes les deux du même type, vérifient l'égalité matricielle $B = Q^{-1}AP$, où P est la matrice de passage de B_E à B'_E et Q est la matrice de passage de B_F à B'_F.*

Démonstration. - 1^{ere} méthode :
On considère une application f de E dans F où l'espace E est de dimension n et l'espace F est de dimension m.
On note X et X' les matrices-colonnes de $M_{n1}(\mathbb{K})$ associée au vecteur x de E relativement dans B_E et B'_E, alors $X = PX'$.
On note Y et Y' les matrices-colonnes associées au vecteur $y = f(x) \in F$ relative-

ment dans B_F et B'_F, alors $Y = QY'$ ou encore $Y' = Q^{-1}Y$.

L'égalité vectorielle $y = f(x)$ peut s'écrire

- relativement aux bases B_E et B_F sous la forme matricielle

$$Y = AX \tag{4.1}$$

- relativement aux bases B'_E et B'_F sous la forme matricielle

$$Y' = BX' \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} Y = AX &\Leftrightarrow Q^{-1}Y = Q^{-1}AX \\ &\Leftrightarrow Y' = Q^{-1}A(PX')\text{car } Q^{-1}Y = Y' \text{ et } X = PX' \\ &\Leftrightarrow Y' = (Q^{-1}AP)X' \text{ car le produit matriciel est associatif.} \end{aligned}$$

En comparant la dernière égalité avec (4.2), on en déduit $B = Q^{-1}AP$.

- 2 ème méthode :

L'égalité $B = Q^{-1}AP$ n'est rien d'autre que l'écriture matricielle de l'égalité fonctionnelle $f = id_F \circ f \circ id_E$ que l'on vérifie aisément puisque $(id_F \circ f \circ id_E)(x) = id_F(f(id_E(x))) = id_F(f(x)) = f(x)$ pour tout $x \in E$ et que l'on schéma-lise par

$$\begin{array}{ccc} (E, B_E) & \underset{f}{\rightarrow} & (F, B_F) \\ id_E \uparrow & & \downarrow id_F \\ (E, B'_E) & \underset{id_f \circ f \circ id_E = f}{\rightarrow} & (F, B'_F) \end{array}$$

Donc

$$M_{B'_E,B'_F}(f) = M_{B'_F,B_F}(id_F) \times M_{B_E,B_F}(f) \times M_{B'_E,B_E}(id_E)$$

d'où

$$B = Q^{-1}AP$$

□

Corollaire 4.2.1. *Soient E un espace vectoriel muni des deux bases B_E et B'_E et f un endomorphisme de E. Alors les deux matrices carrées $A = M_{B_E}(f)$ et $B = M_{B'_E}(f)$ vérifient l'égalité matricielle :*

$$B = P^{-1}AP$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}'_E$.

4.2.4 Matrices équivalentes, Matrices semblables

Définition 4.2.3. *Soient n et m deux entiers naturels non nuls.*
- Soient A et B deux matrices rectangulaires de type (m, n) sur $\mathbb{K}$.
On dit que A est équivalente à B si

$$\exists P \in GL_m(\mathbb{K}), \exists Q \in GL_n(\mathbb{K}) / B = Q^{-1}AP$$

Soient A et B deux matrice carrées d'ordre n sur $\mathbb{K}$. On dit que A est semblable à B si

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) / B = P^{-1}AP.$$

On dit également que A et B sont conjuguées.

Remarque 4.2.3.

1. *Deux matrice de même type sont équivalentes si est seulement si elle représente la même application dans des bases différentes.*
   En particulier deux matrices carrées et de même ordre sont semblables si est seulement si elles représentes le même endomorphisme dans deux bases différentes.
2. *A et B semblables $\Rightarrow$ A et B sont équivalentes.*

Propriétés. La notion d'équivalence entre matrices de type (n, m) définit une relation d'équivalence sur $M_{n,m}(\mathbb{K})$. On a en effet les trois propriétés suivantes :

1. Toute matrice A de $M_{n,m}(\mathbb{K})$ est équivalente à elle même (propriété de réflexivité) puisqu'on peut écrire $A = I_n^{-1}AI_m$ avec $I_m \in GL_m(\mathbb{K})$ et $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$.

2. Soient A et B deux matrice de $M_{n,m}(\mathbb{K})$. Si A est équivalente à B alors B est équivalente à A (propriété de symétrie). En effet. A étant équivalente à B, il existe $P \in GL_m(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\begin{aligned} B = Q^{-1}AP \quad &\Rightarrow \quad QBP^{-1} = A \quad \text{(en multipliant à gauche par } Q \text{ et à droite par } P^{-1}) \\ &\Rightarrow \quad A = (Q^{-1})^{-1}BP^{-1} \end{aligned}$$

Avec $P^{-1} \in GL_m(\mathbb{K})$ et $Q^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$, vérifiant ainsi que la matrice B est équivalente à la matrice A.

3. Soient A, B et C trois matrices de $M_{n,m}(\mathbb{K})$, Si A est équivalente à B et B est équivalente à C alors A est équivalente à C (propriété de transitivité).
En effet, A étant équivalente à B

$$\exists P_1 \in GL_m(\mathbb{K}), \exists Q_1 \in GL_n(\mathbb{K}) / B = Q_1^{-1}AP_1 \tag{4.3}$$

De même, B étant équivalente à C

$$\exists P_2 \in GL_m(\mathbb{K}), \exists Q_2 \in GL_n(\mathbb{K}) / C = Q_2^{-1}BP_2 \tag{4.4}$$

De (4.3) et (4.4), on obtient

$$C = Q_2^{-1}Q_1^{-1}AP_1P_2 = (Q_1Q_2)^{-1}A(P_1P_2)$$

avec $P_1P_2 \in GL_m(\mathbb{K})$ et $Q_1Q_2 \in GL_n(\mathbb{K})$. On a ainsi vérifie que C était équivalente à A.

Proposition 4.2.3. *Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$. Une condition nécessaire et suffisante pour que A soit de rang r et qu'elle soit équivalente à la matrice J_r définie par :*

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & | & 0_{r,m-r} \\ --- & | & --- \\ 0_{n-r,r} & | & 0_{n-r,m-r} \end{pmatrix}$$

Corollaire 4.2.2. *Soient A et B deux matrices rectangulaires de type (n, m) sur $\mathbb{K}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que A et B soient équivalente est que $rg(A) = rg(B)$.*

Démonstration. Si A et B sont équivalentes alors elles ont de même rang (puisque qu'elle représente la même application linéaire dans des bases différentes). Réciproquement, si elles ont même rang, alors elles sont toutes les deux équivalentes à la matrice J_r. Elles sont donc équivalentes entre elles par transitivité de la relation d'équivalence entre matrices. □

Corollaire 4.2.3. *Pour tout $A \in M_{n,m}(\mathbb{K}), rg(A) = rg(A^t)$.*

Démonstration. Soit A une matrice de type (n, m) et de rang r, donc il existe P et Q, $P \in GL_m(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $J_r = Q^{-1}AP$, on a

$$\begin{aligned} J_r = Q^{-1}AP \Leftrightarrow J_r^t &= (Q^{-1}AP)^t \\ &= P^t A^t (Q^{-1})^t \\ &= P^t A^t (Q^t)^{-1} \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow (P^t)^{-1} J_r^t Q^t = A^t$, (en multipliant à gauche par $(P^t)^{-1}$ et à droite par Q^t) et, en passant au rang,

$$rg(A^t) = rg((P^t)^{-1} J_r^t Q^t) = rg(J_r^t)$$

puisque les deux matrices $(P^t)^{-1}$ et Q^t sont inversible, on en déduit alors que $rg(A^t) = r$, car $rg(J_r^t) = r$. □

4.3 Exercices

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix},$$

$B = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit $B' = \{u_1 = e_1 + e_2, u_2 = e_1 - e_2\}$ une autre base de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer la matrice associée à f dans la base canonique.
2. Déterminer le noyau de f , en déduire que f est bijective.
3. Déterminer f^{-1} dans la base canonique, en déduire A^{-1}.
4. Déterminer la matrice associée à f dans la base B'.

Exercice 2 : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base B par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On donne dans $\mathbb{R}^3$ une autre base $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ telle que $e'_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner l'expression de f dans la base canonique.
2. Donner P la matrice de passage de la base B à la base B', puis calculer P^{-1}.
3. Donner $D = M(f, B')$, en déduire $f(e'_1), f(e'_2)$ et $f(e'_3)$ en fonction de e'_1, e'_2 et e'_3 .
4. Calculer D^n puis $A^n (n \in \mathbb{N})$.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et soit $B' = \{u_1 = e_1 + e_2 + e_3, u_2 = e_2 + 2e_3, u_3 = e_3\}$ une autre base de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer le noyau de f, en déduire que f est bijective.

2. Déterminer P la matrice de passage de la base B à la base B'.
3. Déterminer T la matrice associée à f dans la base B'.
4. En déduire $f(u_1), f(u_2)$ et $f(u_3)$ en fonction de u_1, u_2 et u_3.
5. Calculer T^n, puis A^n.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application linéaire définie par :

$$f(P) = P + (1-X)P' + 2P''.$$

Soient $B = \{1, X, X^2\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $B' = \{P_1 = 1-X, P_2 = 1, P_3 = 1+2X-X^2\}$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Déterminer A la matrice associée à f dans la base canonique B.
2. Déterminer P la matrice de passage de la base B à la base B'.
3. Déterminer T la matrice associée à f dans la base B'.

Exercice 5 : On munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de leurs bases canoniques respectives B_1 et B_2. On considère les applications linéaires $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définies par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y-z \\ -x+y-z \\ -x-y+z \end{pmatrix} \text{ et } g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-z \\ 2y-z \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $M(f, B_1, B_1)$ et $M(g, B_1, B_2)$.
2. Déterminer $M(g \circ f, B_1, B_2)$ par un calcul direct et calculer $g \circ f$.

Exercice 6 : On munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de leurs bases canoniques respectives $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $B_2 = \{f_1, f_2\}$. On considère l'application linéaires $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $A = M(f, B_1, B_2)$.

2. Dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, on définit deux nouvelles bases respectives $B'_1 = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ et $B'_2 = \{f'_1, f'_2\}$ telles que $e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   . Donner P la matrice de passage de la base B_1 à la base B'_1.

   . Déterminer la matrice de passage de la base B'_1 à la base B_1.

   . Donner Q la matrice de passage de la base B_2 à la base B'_2.

   . Déterminer la matrice de passage de la base B'_2 à la base B_2.

   . Déterminer la matrice $D = M(f, B'_1, B'_2)$.

   . En déduire $f(e'_1), f(e'_2)$ et $f(e'_3)$ en fonction de f'_1 et f'_2.

Exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application linéaire définie par :

$$f(P) = (X+1)P^{'}.$$

Soient $B = \{1, X, X^2\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $B' = \{P_1 = 1, P_2 = 1 + X, P_3 = 1 + 2X + X^2\}$ une base de$\mathbb{R}_2[X]$.

1. Déterminer A la matrice associée à f dans la base canonique B.

2. Déterminer P la matrice de passage de la base B à la base B'.

3. Déterminer T la matrice associée à f dans la base B'.

4. Calculer A^2, A^3 et T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 : Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) / a + c = 0 \right\}$. Montrer que E est un s.e.v de $M_2(\mathbb{R})$, donner une base de E et déterminer sa dimension.

Exercices supplémentaires

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-z \\ 3x+y-z \end{pmatrix}.$$

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer la matrice associée à f dans la base canonique, déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 10 : Dans $\mathbb{R}^3$ munit de sa bases canoniques $B = \{e_1, e_2, e_3\}$. On considère l'endomorphisme f_a défini par :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : f_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+ay+a^2z \\ y+2az \\ z \end{pmatrix} (a \in \mathbb{R})$$

1. Donner $M_a = M(f_a, B, B)$ et montrer que $M_a \times M_b = M_{a+b}$.
2. En déduire que $\forall a \in \mathbb{R}$, la matrice M_a est inversible. (on remarquera que $M_0 = I_3$).
3. Calculer $M_a^n (n \in \mathbb{N})$.

Exercice 11 : On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ une application linéaire définie par : $f(M) = AM - MC$. Montrer que $B = \{I_2, A, C, AC\}$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$ et déterminer $M(f, B)$.

4.4 Solutions

Exercice 1 :

1. Tout d'abord on a

   $f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_2,$

   $f(e_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -e_1 + e_2.$

   Donc

   $$M_f(B_{\mathbb{R}^2}, B_{\mathbb{R}^2}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}$$

2. Le noyau de f :

$$\begin{aligned} Kerf &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / \begin{array}{c} x-y=0 \\ x+y=0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Donc f est injective et puisque $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ alors f est bijective.

3. Déterminons f^{-1} dans la base canonique :

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{array}$$

donc

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y = X \\ x + y = Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{X+Y}{2} \\ y = \frac{Y-X}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y \\ y = \frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}X \end{cases}$$

Alors

$$\begin{array}{rccl} f^{-1} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} & \longmapsto & f^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y \\ \frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}X \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc

$$f^{-1}(e_1) = f^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2,$$

$$f^{-1}(e_2) = f^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2.$$

D'où

$$A^{-1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}$$

4. La matrice associée à f dans la base $B' = \{u_1 = e_1 + e_2, u_2 = e_1 - e_2\}$

$$B' = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

On a

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2,$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2,$$

Donc

$$
\begin{aligned}
f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad & \Rightarrow \quad \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
& \Rightarrow \quad \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
& \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 0 \\ \alpha_1 - \beta_1 = 2 \end{cases} \\
& \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = -1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad & \Rightarrow \quad \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Rightarrow \quad \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 = 2 \\ \alpha_2 - \beta_2 = 0 \end{cases} \\
& \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_2 = 1 \\ \beta_2 = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ainsi, la matrice associée à f dans la base B' est donnée par

$$
M_f(B', B') = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \end{array}
$$

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et $A = M_f(B_{\mathbb{R}^3}, B_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. L'expression de f dans la base canonique.

Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ où $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$, donc

$$\begin{aligned} f(u) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \quad \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+2y \\ -x+2z \end{pmatrix}$.

Où bien on a

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ x+2y \\ -x+2z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. La matrice de passage P de B à B'

   On a P la matrice associé à l'application identité

$$\begin{array}{rcccc} Id & : & (E, B') & \longrightarrow & (E, B) \\ & & x & \longmapsto & Id(x) = x \end{array}$$

Pour calculer la matrice P, on écrivons e_1', e_2', e_3' en fonction de e_1, e_2 et e_3

$$e_1' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -e_1 + e_2 - e_3,\ e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2,\ e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2 + e_3.$$

Ainsi, la matrice de passage est donnée par $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour calculer la matrice P^{-1}, on écrivons e_1, e_2, e_3 en fonction de e'_1, e'_2 et e'_3

$$\begin{cases} e'_1 &= -e_1 + e_2 - e_3 \\ e'_2 &= e_2 \\ e'_3 &= e_2 + e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 &= e'_2 - e'_3 + e'_2 - e'_1 \\ e_2 &= e'_2 \\ e_3 &= e'_3 - e'_2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} e_1 &= -e'_1 + 2e'_2 - e'_3 \\ e_2 &= e'_2 \\ e_3 &= e'_3 - e'_2 \end{cases}$$

D'où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. La matrice D associée à f dans la base B'

   On a $D = P^{-1}AP$ donc

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Et on en déduit que, $f(e'_1) = e'_1, f(e'_2) = 2e'_2$ et $f(e'_3) = 2e'_3$.

4. Calculons D^n puis $A^n (n \in \mathbb{N})$.

On a

$$\begin{aligned} D = P^{-1}AP \quad &\Rightarrow \quad A = PDP^{-1} \\ &\Rightarrow \quad A^n = PD^nP^{-1} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2^n & 2^n \\ -1 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1+2^n & 2^n & 0 \\ 1-2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et $A = M_f(B_{\mathbb{R}^3}, B_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

1. Le noyau de f

   -L'expression de f dans la base canonique.

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x-3y+3z \end{pmatrix}.$$

Donc le noyau de f est donnée par :

$$
\begin{aligned}
Ker f &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} y \\ z \\ x - 3y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{c} y = 0 \\ z = 0 \\ x - 3y + 3z = 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}
$$

Donc f est injective et puisque $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ alors f est bijective.

2. La matrice de passage P de B à B'.

   On a, $u_1 = e_1 + e_2 + e_3, u_2 = e_2 + 2e_3, u_3 = e_3$, donc la matrice de passage est donnée par :

$$
P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

3. La matrice T associée à f dans la base B'.

   On a $T = P^{-1}AP$

   - Calculons P^{-1}.

On écrivons e_1, e_2, e_3 en fonction de u_1, u_2 et u_3.

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_1 & = & e_1+e_2+e_3 \\ u_2 & = & e_2+2e_3 \\ u_3 & = & e_3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} e_1 & = & u_1-u_2+2u_3-u_3 \\ e_2 & = & u_2-2u_3 \\ e_3 & = & u_3 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} e_1 & = & u_1-u_2+u_3 \\ e_2 & = & u_2-2u_3 \\ e_3 & = & u_3 \end{array}\right.$$

Ainsi, la matrice P^{-1} est donnée par :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \end{array} \end{aligned}$$

Et on en déduit que, $f(u_1) = u_1, f(u_2) = u_1 + u_2$ et $f(u_3) = u_2 + u_3$

-Calculons T^n puis $A^n (n \in \mathbb{N})$. On a

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{K} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3}$$

Donc $T^n = (K + I_3)^n$. On remarque que la matrice K est nilpotente car :

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} T^n = (K + I_3)^n &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i K^i I_3^{n-i} \quad \text{(Binôme de Newton)} \\ &= C_n^0 K^0 I_3^n + C_n^1 K^1 I_3^{n-1} + C_n^2 K^2 I_3^{n-2} + \underbrace{C_n^3 K^3 I_3^{n-3} + \cdots}_{=0} \\ &= K^0 + nK + \tfrac{n!}{2!(n-2)!} k^2 \\ &= I_3 + nK + \tfrac{n(n-1)}{2} k^2 \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} T^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n^2-n}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2-n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On sait que $A^n = PT^nP^{-1}$, donc

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2-n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2-n}{2} \\ 1 & n+1 & \frac{n^2+n}{2} \\ 1 & n+2 & \frac{n^2+3n+2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n^2-3n+2}{2} & \frac{-2n^2+4n}{2} & \frac{n^2-n}{2} \\ \frac{n^2-n}{2} & \frac{2-2n^2}{2} & \frac{n^2+n}{2} \\ \frac{n^2+n}{2} & \frac{-2n^2-4n}{2} & \frac{n^2+3n+2}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 4 : Soit

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & & P & \longmapsto & f(P) = P + (1-X)P' + 2P'' \end{array}$$

1. La matrice associée à f dans la base $B = \{1, X, X^2\}$

   On a

   $f(1) = 1 = 1 \times (1) + 0 \times (X) + 0 \times (X^2)$,

   $f(X) = X + (1-X) = 1 = 1 \times (1) + 0 \times (X) + 0 \times (X^2)$,

   $f(X^2) = X^2 + (1-X)(2X) + 4 = 4 \times (1) + 2 \times (X) - 1 \times (X^2)$.

   Donc la matrice associée à f dans la base B est donnée par :

$$M_f(B_{\mathbb{R}_2[X]}, B_{\mathbb{R}_2[X]}) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

2. La matrice de passage de B à B'

$$P = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

   car

   $1 - X = 1 \times (1) - 1 \times (X) + 0 \times (X^2)$

   $1 = 1 \times (1) + 0 \times (X) + 0 \times (X^2)$

   $1 + 2X - X^2 = 1 \times (1) + 2 \times (X) - 1 \times (X^2)$

3. La matrice T associée a f dans la base $B' = \{P_1 = 1 - X, P_2 = 1, P_3 = 1 + 2X - X^2\}$

   On écrivons $f(P_1), f(P_2), f(P_3)$ en fonction de P_1, P_2 et P_3

   $f(P_1) = f(1-X) = 0 = \alpha_1 \times (1-X) + \beta_1 \times (1) + \gamma_1 \times (1 + 2X - X^2)$, ce qui implique que $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$

$$\begin{aligned} f(P_2) &= f(1) = 1 = \alpha_2 \times (1-X) + \beta_2 \times (1) + \gamma_2 \times (1+2X-X^2) \\ &= \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + (-\alpha_2 + 2\gamma_2)X - \gamma_2 X^2 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &=& 1 \\ -\alpha_2 + 2\gamma_2 &=& 0 \\ -\gamma_2 &=& 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2 = 1 \\ \gamma_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} f(P_3) &= f(1+2X-X^2) = -1-2X+X^2 \\ &= \alpha_3 \times (1-X) + \beta_3 \times (1) + \gamma_3 \times (1+2X-X^2) \\ &= \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 + (-\alpha_3 + 2\gamma_3)X - \gamma_3 X^2 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 &=& -1 \\ -\alpha_3 + 2\gamma_3 &=& -2 \\ -\gamma_3 &=& 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_3 = 0 \\ \beta_3 = 0 \\ \gamma_3 = -1 \end{array} \right.$$

D'où

$$T = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \end{array}$$

Exercice 5 : Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définies par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y-z \\ -x+y-z \\ -x-y+z \end{pmatrix} \text{ et } g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-z \\ 2y-z \end{pmatrix}.$$

1. Déterminons $M(f, B_1, B_1)$ et $M(g, B_1, B_2)$.

   On a

   $$f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = e_1 - e_2 - e_3,$$

$$f(e_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -e_1 + e_2 - e_3,$$

$$f(e_3) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -e_1 - e_2 + e_3.$$

Donc

$$M(f, B_1, B_1) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array},$$

Et

$$g(e_1) = g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e'_1 + 0e'_2,$$

$$g(e_2) = g\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0e'_1 + 2e'_2,$$

$$g(e_3) = g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -e'_1 - e'_2.$$

Donc

$$M(g, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \end{array}$$

2. Déterminons $M(g \circ f, B_1, B_2)$.

$$\begin{aligned}
M(g\circ f, B_1, B_2) &= M(g, B_1, B_2)\times M(f, B_1, B_1)\\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3\\ -1 & 3 & -3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et

$$g\circ f\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = g\left(f\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right)$$

$$= \mathrm{g}\begin{pmatrix} x-y-z\\ -x+y-z\\ -x-y+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x-y-z)-(-x-y+z)\\ 2(-x+y-z)-(-x-y+z)\end{pmatrix}.$$

Ce qui implique

$$g\circ f\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-y-3z\\ -x+3y-3z\end{pmatrix}.$$

Exercice 6 : Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ définie par : $f\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y\\ y-z\end{pmatrix}$

1. La matrice $M(f, B_{\mathbb{R}^3}, B_{\mathbb{R}^2})$.

   On a

   $$f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix} = 1f_1 + 0f_2,$$

   $$f(e_2) = f\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix} = 1f_1 + 1f_2,$$

$$f(e_3) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0f_1 - 1f_2.$$

Donc

$$M(f, B_{\mathbb{R}^3}, B_{\mathbb{R}^2}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array},$$

2. La matrice de passage de B_1 à B'_1

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

car

$e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0e_1 + e_2 - e_3$, $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1e_1 + 0e_2 + 2e_3$, $e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$ $e_1 + e_2 + 0e_3$,

3. La matrice de passage de B'_1 à B_1

On écrivons e_1, e_2, e_3 en fonction de e'_1, e'_2 et e'_3

$e_1 = \alpha_1 e'_1 + \beta_1 e'_2 + \gamma_1 e'_3$ ce qui implique

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \{beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \beta_1 + \gamma_1 & = & 1 \\ \alpha_1 + \gamma_1 & = & 0 \\ -\alpha_1 + 2\beta_1 & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 = -2 \\ \beta_1 = -1 \\ \gamma_1 = 2 \end{array} \right.$$

$e_2 = \alpha_2 e'_1 + \beta_2 e'_2 + \gamma_2 e'_3$, donc

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ce qui implique que

$$\begin{cases} \beta_2 + \gamma_2 & = & 0 \\ \alpha_2 + \gamma_2 & = & 1 \\ -\alpha_2 + 2\beta_2 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 2 \\ \beta_2 = 1 \\ \gamma_2 = -1 \end{cases}$$

$e_3 = \alpha_3 e'_1 + \beta_3 e'_2 + \gamma_3 e'_3$ ce qui implique

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{cases} \beta_3 + \gamma_3 & = & 0 \\ \alpha_3 + \gamma_3 & = & 0 \\ -\alpha_3 + 2\beta_3 & = & 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 1 \\ \beta_3 = 1 \\ \gamma_3 = -1 \end{cases}$$

Donc la matrice de passage de B'_1 à B_1 est donnée par

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Où bien $P^{-1} = 1/det(P)\ {}^t co(P)$

4. La matrice de passage de B_2 à B'_2

$$Q = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array}$$

car $f'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1f_1 + 0f_2$, $f'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1f_1 + 1f_2$,

5. La matrice de passage de B'_2 à B_2

$Q^{-1} = 1/det(Q)\ {}^t co(Q)$ où $det(Q) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ et $co(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$${}^{t}co(Q) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ce qui implique que}$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. La matrice $D = M(f, B_1', B_2')$.
   On a $M(f, B_1', B_2') = pass(B_2' \to B_2)M(f, B_1, B_2)pass(B_1 \to B_1')$ donc

$$\begin{aligned} M(f, B_1', B_2') &= Q^{-1}M(f, B_{\mathbb{R}^3}, B_{\mathbb{R}^2})P \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} f_1' \\ f_2' \end{array} \end{aligned}$$

   Et on en déduit que, $f(e_1') = -f_1' + 2f_2', f(e_2') = 3f_1' - 2f_2'$ et $f(e_3') = f_1' + f_2'$

Exercice 7 : Soit

$$\begin{array}{rccc} f & : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & f(P) = (X+1)P' \end{array}$$

1. La matrice associée à f dans la base $B = \{1, X, X^2\}$
   on a
   $f(1) = 0 = 0 \times (1) + 0 \times (X) + 0 \times (X^2)$,
   $f(X) = X + 1 = 1 \times (1) + 1 \times (X) + 0 \times (X^2)$,
   $f(X^2) = 2X^2 + 2X = 0 \times (1) + 2 \times (X) + 2 \times (X^2)$.

Donc la matrice associée à f dans la base canonique est donnée par :

$$M_f(B_{\mathbb{R}_2[X]}, B_{\mathbb{R}_2[X]}) = A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

2. La matrice de passage de B à B'

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

car

$P_1 = 1 = 1 \times (1) + 0 \times (X) + 0 \times (X^2)$

$P_2 = 1 + X = 1 \times (1) + 1 \times (X) + 0 \times (X^2)$

$P_3 = 1 + 2X + X^2 = 1 \times (1) + 2 \times (X) + 1 \times (X^2)$

3. La matrice T associée a f dans la base $B' = \{P_1 = 1, P_2 = 1 + X, P_3 = 1 + 2X + X^2\}$

On écrivons $f(P_1), f(P_2), f(P_3)$ en fonction de P_1, P_2 et P_3

$f(P_1) = f(1) = 0 = \alpha_1 \times (1) + \beta_1 \times (1 + X) + \gamma_1 \times (1 + 2X + X^2)$, ce qui implique que $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$

$$\begin{aligned} f(P_2) &= f(1+X) = 1 + X = \alpha_2 \times (1) + \beta_2 \times (1+X) + \gamma_2 \times (1 + 2X + X^2) \\ &= \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + (\beta_2 + 2\gamma_2)X + \gamma_2 X^2 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 & = & 1 \\ \beta_2 + 2\gamma_2 & = & 1 \\ \gamma_2 & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2 = 1 \\ \gamma_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} f(P_3) &= f(1+2X+X^2) = 2+4X+2X^2 \\ &= \alpha_3 \times (1) + \beta_3 \times (1+X) + \gamma_3 \times (1+2X+X^2) \\ &= \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 + (\beta_3 + 2\gamma_3)X + \gamma_3 X^2 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 & = & 2 \\ \beta_3 + 2\gamma_3 & = & 4 \\ \gamma_3 & = & 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_3 = 0 \\ \beta_3 = 0 \\ \gamma_3 = 2 \end{array} \right.$$

D'où

$$T = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \end{array}$$

4. Calculons A^2, A^3 et T^n

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Puisque T est une matrice diagonale alors $T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Exercice 8 : Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) / a + c = 0 \right\}$.

Montrons que E est un s.e.v de $M_2(\mathbb{R})$,

1. On a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$ car $0 + 0 = 0$, alors $E \neq \emptyset$

2. Stabilité par rapport à l'addition

   $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$:

   $$A + A' = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix},$$

   ensuite,

   $$a + a' + c + c' = \underbrace{(a + c)}_{=0} + \underbrace{(a' + c')}_{=0} = 0 \Rightarrow A + A' \in E$$

3. Stabilité par rapport à la multiplication

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$, alors

   $$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix},$$

   en outre,

   $$\lambda a + \lambda c = \lambda \underbrace{(a + c)}_{=0} \Rightarrow \lambda A \in E$$

   On conclut que E est un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

- Base de E et sa dimension.

$$\begin{aligned}
E &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) / a + c = 0 \right\}, \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) / a = -c \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -c & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) / b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ c \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_3} \right\}
\end{aligned}$$

Donc $\{A_1, A_2, A_3\}$ est une famille génératrice de E.

Montrons que la famille $\{A_1, A_2, A_3\}$ est libre :

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & o \end{pmatrix}$, ce qui implique que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$.

Donc la famille $\{A_1, A_2, A_3\}$ est libre et $B_E = \{A_1, A_2, A_3\}$ est une base de E, $dim(E) = 3$.

Chapitre 5

Systèmes d'équations linéaires

5.1 Systèmes d'équations linéaires

Définition 5.1.1. *Soient n et m deux entiers naturels non nuls.*
On appelle système linéaire de n équations à m inconnus et à coefficients dans $\mathbb{K}$ (on dit aussi un système linéaire de type (n, m) ou $n \times m$) un système d'équation de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right. \quad (5.1)$$

où les inconnues sont les scalaire $x_1, x_2, \dots, x_m$ de $\mathbb{K}$ et où les données sont les scalaires a_{ij} de $\mathbb{K}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$ (appelés coefficients du système linéaire) et les scalaire b_i de $\mathbb{K}$ pour $1 \leq i \leq n$ (appelés seconds membres du système linéaire).
On appelle solution du système linéaire tout m-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m$ qui vérifie les n équations du système précèdent.
Un système linaire est dit homogène si tous les seconds membres sont nuls.

Remarque 5.1.1. *Notons S l'ensemble de tous les m-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m$ véri-*

fiant les n équations du système (S)*. Donc* $S = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$ *où, pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$*,* H_i *est le sous-ensemble de* $\mathbb{K}^m$ *défini par :*

$$H_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}^m / a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_m = b_i\}$$

Pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*,* H_i *n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^m$ *puisqu'il ne contient pas le vecteur nul, sauf si* $b_i = 0$*.*
Un système linéaire de type (n, m) *peut, soit ne posséder aucune solution, soit en posséder une seule, soit en posséder une infinité.*

Définition 5.1.2. *On dit que deux systèmes linéaires sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions. Un système linéaire est dit déterminer (respectivement in-déterminer) lorsqu'il possède une unique solution (respectivement une infinité de solutions).*

5.2 La forme matricielle d'un système linéaire

Un système linéaire de type (n, m) peut s'écrire sous la forme d'une équation matricielle (EM). Pour cela, considérons la matrice rectangulaire $A \in \underset{n,m}{M}(\mathbb{K})$ et les matrices-colonnes $X \in \underset{m,1}{M}(\mathbb{K})$ et $B \in \underset{n,1}{M}(\mathbb{K})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

donc on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{cases} \Leftrightarrow A \cdot X = B \ (EM)$$

résoudre le système (5.1) revient à résoudre l'équation matricielle (EM). Dans ce cas il s'agit de déterminer toutes les matrices-colonnes X de $\underset{m,1}{M}(\mathbb{K})$ vérifiant (EM).

Définition 5.2.1. *Un système d'équations $AX = B$ avec $A \in \underset{n,m}{M}(\mathbb{K})$, $X \in \underset{m,1}{M}(\mathbb{K})$ et $B \in \underset{n,1}{M}(\mathbb{K})$ est dit rectangulaire. En particulier il est dit :*
- Carré si la matrice A est carrée.
-Triangulaire si la matrice A est triangulaire.
-Diagonal si la matrice A est diagonale.

Définition 5.2.2. *On appelle rang d'un système linéaire le rang de toute matrice qui lui est associée.*

5.3 Système de cramer

Définition 5.3.1. *Un système linéaire est dit de cramer s'il est carré et s'il est de rang maximal (c'est-à-dire : $r = n = m$).*
Un système de cramer est aussi appelé système régulier.

Remarque 5.3.1. *Un système de cramer est un système carré dont la matrice associée est inversible, c'est-à-dire $det(A) \neq 0$.*

Proposition 5.3.1. *Un système de cramer possède une seul solution $\tilde{X} = A^{-1}B$.*

Exemples 5.3.1. *Considérons dans* $\mathbb{R}$ *le système* 3×3 *suivant :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - x_3 & = & 1 \\ -x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_1 + 2x_2 & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1$ *donc le système est de cramer*

d'où $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ *où* $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\, {}^t co(A)$

5.4 Exercices

Exercice 1 :

1. Résoudre le système suivant par deux méthode différente

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 5 \\ 3x & + & 7y & = & 2 \end{array}\right.$$

2. Choisir la méthode la plus rapide pour résoudre les système suivant selon les valeurs de a

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} ax & + & y & = & 3 \\ (a^2+1)x & + & 2ay & = & 2 \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{rcrcl} (a+1)x & + & (a-1)y & = & 2 \\ 3(a-1)x & + & (a+1)y & = & 2 \end{array}\right.$$

Exercice 2 : Résoudre les systèmes suivants

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right.$$

Exercice 3 : Trouver les solutions de

$$\begin{cases} 3x+2z & = & 0 \\ 3x+z+3t & = & 0 \\ x+y+z+t & = & 0 \\ 2x-y+z-t & = & 0 \end{cases}$$

Exercice 4 : Etudier selon les valeurs de a et b, l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{cases}$$

Exercice 5 : Touver les réels a, b et c tels que pour tout polynôme de degré ≤ 3 on ait :

$$\int_2^4 P(x)dx = aP(2) + bP(3) + cP(4)$$

5.5 Solutions

Exercice 1 :

1. -1 ère méthode : par les matrice.

   Le système s'écrit :

   $AX = Y$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ La solutions du système est donnée par la formule suivante :

   $$X = A^{-1}Y$$

   Où

   $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} {}^t co(A) = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

-2 ème méthode : par les formules de cramer.

On a $detA = 11 \neq 0$ alors

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = 3 \qquad et \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = -1$$

2. Avant tout, on regarde s'il existe une solutions unique.

   Le systèmes admet une solutions unique si est seulement si le déterminant est non nul. Pour le premier système le déterminant $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2+1 & 2a \end{vmatrix} = a^2 - 1$, donc le système admet unique solution si $a \neq \pm 1$, alors

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2+1 & 2a \end{vmatrix}} = \frac{6a-2}{a^2-1} \qquad et \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 3 \\ a^2+1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2+1 & 2a \end{vmatrix}} = \frac{-3a^2+2a-3}{a^2-1}$$

   Si $a = 1$ alors le systèmes devient $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$, impossible. Donc il n'y a pas de solution.

   Si $a = -1$ alors le systèmes devient $\begin{cases} -x + y = 3 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$, impossible. Donc le système n'admet pas de solution.

   Pour le deuxième système le déterminant $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{vmatrix} = 4a$

   Si $a \neq 0$ alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4a}\begin{pmatrix} a+1 & -a+1 \\ -a+1 & a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

Si $a = 0$ il n'y a pas de solutions.

Exercice 2 : Pour le premier système le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$ alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour le deuxième système le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, alors le système admet une unique solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}^t\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour le troisième système le déterminant $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$, alors le système admet une unique solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -4 \\ 5 & 1 & -7 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}^t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ -2 & 1 & 7 \\ -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 8a+5b-c \\ -2a+b+7c \\ -4a-7b+5c \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : Soit

$$\begin{cases} 3x+2z & = & 0 \\ 3x+z+3t & = & 0 \\ x+y+z+t & = & 0 \\ 2x-y+z-t & = & 0 \end{cases}$$

Le déterminant du système $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, alors on utilise la méthode du pivot de Gauss pour trouver les solutions du système

$$\begin{cases} y & + & t & + & x & + & z & = & 0 & L_1 \\ 3y & + & 3t & & & + & z & = & 0 & L_2 \\ -y & - & t & + & 2x & + & z & = & 0 & L_3 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 & L_4 \end{cases}$$

On commence le pivot de Gauss avec les opérations $L_2 - 3L_1 \to L_2, L_3 + L_1 \to L3$ pour obtenir :

$$\begin{cases} y & + & t & + & x & + & z & = & 0 \\ & & & & -3x & - & 2z & = & 0 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 \end{cases}$$

Les trois dernières ligne sont identiques, on se ramène donc à un système avec 2 équations et 4 inconnues :

$$\begin{cases} y & + & t & + & x & + & z & = & 0 \\ & & & & -3x & - & 2z & = & 0 \end{cases}$$

Nous choisissons x et y comme paramètres, alors $z = \frac{-3}{2}x$ et $t = \frac{1}{2}x - y$ les solutions sont donc

$$\{(x, y, z = \frac{-3}{2}x, t = \frac{1}{2}x - y)/x, y \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 4 : Soit

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

On applique la méthode du pivot de Gauss

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} x & + & by & + & az & = & 1 & L_1 \\ x & + & aby & + & z & = & b & L_2 \\ ax & + & by & + & z & = & 1 & L_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccc} x & + & by & + & az & = & 1 & L_1 \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 & L_2 \leftarrow L_2 - L1 \\ & & b(1-a)y & + & (1-a^2)z & = & 1-a & L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccc} x & + & by & + & az & = & 1 & L_1 \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 & L_2 \\ & & & & (2-a-a^2)z & = & b-a & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

-Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ alors $2 - a - a^2 \neq 0$, donc $z = \frac{b-a}{2-a-a^2}$, et si $b \neq 0$ alors $y = \frac{b-1-(1-a)z}{b(a-1)}$, et avec la première ligne on en déduit que $x = 1 - by - az$.
Donc si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ et $b \neq 0$ alors il existe une unique solution (x, y, z)
-Si $a = 1$ alors le système devient

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & by & + & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & b-1 \\ & & & & 0 & = & b-1 \end{array}\right.$$

Si $b \neq 1$ il n'y a pas de solution. Si $a = 1$ et $b = 1$ alors l'ensemble des solutions est

$$\{(1 - y - z, y, z/y, z \in \mathbb{R}\}$$

Si $a = -2$ alors le système devient

$$\begin{cases} x + by - 2z = 1 \\ -3by + 3z = b-1 \\ 0 = b+2 \end{cases}$$

Si $b \neq -2$ il n' y a pas de solution. Si $a = -2$ et $b = -2$ alors le système devient

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ 6y + 3z = -3 \end{cases}$$

On choisit y comme paramètre, alors le système admet une infinité de solutions

$$\{(-1-2y, y, -1-2y/y \in \mathbb{R}\}.$$

Si $b = 0$ alors on obtient $z = \frac{-1}{1-a} = \frac{-a}{2-a-a^2}$ (impossible), alors dans ce cas le système n' admet pas de solutions.

Exercice 5 : - Calculons l'intégrale

$$\int_2^4 P(x)dx = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4) \text{ où } P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ donc}$$

$$\int_2^4 P(x)dx = [a\frac{x^4}{4} + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^2}{2} + dx]_2^4 = 60a + \frac{56}{3}b + 6c + 2d.$$

D'autre part

$\alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4) = (8\alpha + 27\beta + 64\gamma)a + (4\alpha + 9\beta + 16\gamma)b + (2\alpha + 3\beta + 4\gamma)c + (\alpha + \beta + \gamma)d$

Ce qui donne

$(8\alpha + 27\beta + 64\gamma)a + (4\alpha + 9\beta + 16\gamma)b + (2\alpha + 3\beta + 4\gamma)c + (\alpha + \beta + \gamma)d = 60a + \frac{56}{3}b + 6c + 2d$

Ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ 2\alpha + 3\beta + 4\gamma = 6 \\ 4\alpha + 9\beta + 16\gamma = \frac{56}{3} \\ 8\alpha + 27\beta + 64\gamma = 60 \end{cases}$$

On utilise la méthode du Pivot

$$\left\{\begin{array}{lcll} \alpha+\beta+\gamma & = & 2 & L_1 \\ 2\alpha+3\beta+4\gamma & = & 6 & L_2 \\ 4\alpha+9\beta+16\gamma & = & \frac{56}{3} & L3 \\ 8\alpha+27\beta+64\gamma & = & 60 & L_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcll} \alpha+\beta+\gamma & = & 2 & L_1 \\ \beta+2\gamma & = & 2 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ 5\beta+12\gamma & = & \frac{32}{3} & L_3 \leftarrow L3-4L_1 \\ 19\beta+56\gamma & = & 44 & L_4 \leftarrow L_4-8L1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcll} \alpha+\beta+\gamma & = & 2 & L_1 \\ \beta+2\gamma & = & 2 & L_2 \leftarrow L_2 \\ 2\gamma & = & \frac{2}{3} & L_3 \leftarrow L3-5L_2 \\ 18\gamma & = & 6 & L_4 \leftarrow L_4-8L1 \end{array}\right.$$

D'où $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{4}{3}$, $\gamma = \alpha = \frac{1}{3}$.

Bibliographie

[1] S. Amari, *Differential-geometrical Methods in statistics, Lecture Notes in statistics*, 28, Springer, Berlin, 1985.55.

[2] E. Azouly, J. Avignant, G. Auliac *Problèmes corrigés de mathématiques*, DEUG MIAS/SM, Edisience(Dunod pour la nouvelle édition), Paris 2002.

[3] E. Azouly, J. Avignant, G. Auliac, *Les mathématiques en licence, 1 ère. Tome 1 : Cous+ exos*, MIAS.Miass.SM, Edisience(Dunod pour la nouvelle édition), Paris 2003.

[4] E. Azouly, J. Avignant, G. Auliac, *Les mathématiques en licence, 1 ère. Tome 2 : Cous+ exos*, MIAS.Miass.SM, Edisience(Dunod pour la nouvelle édition), Paris 2003.

[5] R. Godement, *Cours d'algèbre*. Hermann, 1966.

[6] M. H. Mortad, *Exercices courigés d'algèbre, Première année L.M.D*, Edition"Dar el Bassair" (Alger-Algérie), 2012.

[7] M. Queysanne, *Algèbre*, Collection U, Armand Colin, 1971.