Université de Saïda - Dr Moulay Tahar

Faculté des Sciences

Département[1] : *MATHEMATIQUES*[2]

Laboratoire : *Géométrie, Analyse, Contrôle et Applications*

Algèbre 1

Exercices corrigés

Polycopie destiné aux étudiants de première année Mathématiques et Informatique

***F**ayssal **C**harif*[3]

Date: 2023

1. Site web : https ://www.univ-saida.dz/dpt-maths/
2. E-mail : dpt-maths.sci@univ-saida.dz
3. E-mail : mat.faycal@hotmail.fr

Table des matières

Introduction

Ce manuscrit est destiné principalement aux étudiants de première année Mathématiques et informatique, ainsi qu'à toute personne ayant besoin d'outils d'algèbre de base.
Nous y présentons différents exercices d'algèbre de degré de difficulté variable, avec des corrigés détaillés.
Le lecteur y trouvera aussi des exercices supplémentaires et quelque sujets d'examens sans corrigé.
Son contenu propose des exercices résolus qui conduisent l'étudiant à une connaissance approfondie des notions de base de la logique. Vient ensuite des exercices sur la théorie des ensembles, les applications et leur classification, les relations et structure algébrique.
Nous espérons que cette modeste contribution soit utile pour le lecteur, en particulier aux étudiants de première année Mathématiques et informatique.

Chapitre 1

Eléments de Logique

1.1 Exercices

Exercice 1.1 : Soient P, Q et R trois propositions.

1. Montrer que les deux propositions $P \Rightarrow Q$ et $\overline{P} \vee Q$ sont équivalentes.

2. En déduire l'équivalence entre les deux propositions $\overline{P \Rightarrow Q}$ et $P \wedge \overline{Q}$.

3. Ecrire la négation de $\overline{(P \vee Q)} \Rightarrow R$, $\overline{P} \vee Q \Rightarrow \overline{R}$.

Exercice 1.2 : Soient P, Q et R trois propositions. Vérifier que la proposition $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ est une tautologie.

Exercice 1.3 : Soient P, Q et R trois propositions logiques. Montrer que :

1. $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

2. $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$

3. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

4. $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Exercice 1.4 : Soient P et Q deux propositions logiques. Montrer que :

1. $\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$,

2. $\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$,
3. $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$,
4. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$,

Exercice 1.5 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. La fonction f s'annule.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. La fonction f est la fonction constante.
4. La fonction f n'est pas une fonction constante.

Exercice 1.6 : Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. La fonction f est paire, La fonction f est impaire.
2. La fonction f est inférieure ou égale à la fonction g.
3. La fonction f n'est pas inférieure ou égale à la fonction g.
4. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts.
5. f est croissante.

Exercice 1.7 : Soient les quatre assertions suivantes

$a)\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0.$ $b)\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0.$
$c)\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0.$ $d)\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x.$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Exercice 1.8 : Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer. n est un entier naturel, x et y sont des nombres réels.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, (n premier $\Rightarrow n = 2$ ou n est impair) .

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, (xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \quad et \quad y \neq 0)$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

Exercice 1.9 : En utilisant le raisonnement par contraposition ; Montrer que

1. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2$ pair $\Rightarrow n$ pair.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq 2$ et $y \neq 2 \Rightarrow xy - 2x - 2y + 4 \neq 0$.

Exercice 1.10 : Montrer à l'aide du raisonnement par l'absurde que
$\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 1.11 : Montrer par récurrence ce qui suit

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} K = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} K^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1.2 Solutions

Exercice 1.1 :

1. Montrons que $P \Rightarrow Q$ et $\overline{P} \vee Q$ sont équivalentes.

   Pour montrer l'équivalence il suffit d'établir les tables de vérités. On a d'une part :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

   et d'autre part :

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{P} \vee Q$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

   alors les deux proposions sont équivalentes.

2. En déduit que $\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$

   On a $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$, alors

$$\begin{aligned} \overline{P \Rightarrow Q} &\equiv \overline{\overline{P} \vee Q} \\ &\equiv \overline{\overline{P}} \wedge \overline{Q} \\ &\equiv P \wedge \overline{Q}. \end{aligned}$$

3. La négation de $\overline{(P \vee Q)} \Rightarrow R$ et $\overline{P} \vee Q \Rightarrow \overline{R}$.

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{(P \vee Q)} \Rightarrow R} &\equiv \overline{\overline{\overline{(P \vee Q)}} \vee R} \\
&\equiv \overline{(P \vee Q) \vee R} \\
&\equiv \overline{P} \wedge \overline{Q} \wedge \overline{R}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\overline{(\overline{P} \vee Q) \Rightarrow \overline{R}} &\equiv \overline{\overline{(\overline{P} \vee Q)} \vee \overline{R}} \\
&\equiv (\overline{P} \vee Q) \wedge R.
\end{aligned}$$

Exercice 1.2 : Premièrement il faut rappeler qu'une tautologie est une proposition qui ne prend que la valeur "1".
Montrons que le principe de transitivité de l'implication est une tautologie, alors il suffit d'établir les tables de vérité.

P	Q	R	$\underbrace{P \Rightarrow Q}_{A}$	$\underbrace{Q \Rightarrow R}_{B}$	$\underbrace{P \Rightarrow R}_{C}$	$\underbrace{A \wedge B}_{D}$	$D \Rightarrow C$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Alors la proposition est une tautologie.

Exercice 1.3 :

1. Vérifiant $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$ par la table de vérité :

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \wedge R$	$Q \wedge R$	$P \wedge (Q \wedge R)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

2.

$$\begin{aligned}
(P \vee Q) \vee R &\equiv \overline{(\overline{P} \wedge \overline{Q})} \vee R \\
&\equiv \overline{\overline{\overline{(\overline{P} \wedge \overline{Q})} \vee R}} \\
&\equiv \overline{\overline{\overline{(\overline{P} \wedge \overline{Q})}} \wedge \overline{R}} \\
&\equiv \overline{\overline{P} \wedge (\overline{Q} \wedge \overline{R})} \\
&\equiv P \vee (Q \vee R)
\end{aligned}$$

D'après (1)et (2), $\wedge, \vee$ sont associatives.

3.

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$\underbrace{P \vee Q}_{A}$	$\underbrace{P \vee R}_{B}$	$A \wedge B$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

4.

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$\underbrace{P \wedge Q}_{A}$	$\underbrace{P \wedge R}_{B}$	$A \vee B$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

D'après (3)et (4), $\wedge, \vee$ sont distributives.

Exercice 1.4 :

1. $\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$,(loi de Morgan)

   On la démontre par table de vérité :

P	Q	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

2.

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

3.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P \Rightarrow Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \wedge \overline{Q}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0

4.

$$\begin{aligned} P \Rightarrow Q &\equiv \overline{P} \vee Q \\ &\equiv \overline{P} \vee \overline{\overline{Q}} \\ &\equiv \overline{\overline{Q}} \vee \overline{P} \\ &\equiv \overline{Q} \Rightarrow \overline{P} \end{aligned}$$

Exercice 1.5 :

1. La fonction f s'annule (possède une racine x^*).

$$\exists x^* \in I, f(x^*) = 0$$

2. La fonction f est la fonction nulle.

$$\forall x \in I, f(x) = 0$$

3. La fonction f est la fonction constante.

$$\exists C \in \mathbb{R} / f(x) = c, \forall x \in I$$

4. La fonction f n'est pas une fonction constante.

$$\exists a, b \in I, a \neq b \quad et \quad f(a) \neq f(b)$$

Exercice 1.6 :

1. La fonction f est paire
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$$
La fonction f est impaire
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(-x)$$
2. La fonction f est inférieure ou égale à la fonction g.
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)$$
3. La fonction f n'est pas inférieure ou égale à la fonction g.
$$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > g(x)$$
4. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts.
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$$
5. f est croissante.
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$$

Exercice 1.7 : Soient les quatre assertions suivantes

$a)\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y > 0.$ $b)\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y > 0.$

$c)\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y > 0.$ $d)\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x.$

(a) Fausse , car sa négation
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y \leq 0$ est vraie,
étant donné $x \in \mathbb{R}$ il existe toujours $y \in \mathbb{R}$, tel que $x+y \leq 0$, par exemple on prend $y = -(x+2)$ alors $x+y = x-x-2 = -2 \leq 0$.

(b) Vraie, pour un x donné on peut prendre par exemple $y = -x+2$ alors $x+y = x-x+2 = 2 > 0$, sa négation est $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y \leq 0$

(c) Fausse, par exemple $x = -2$ et $y = -3$, $x + y = -5 < 0$ sa négation est $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$

(d) Vraie, on peut prendre $x = -2$, sa négation est $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \leq x$.

Exercice 1.8 :

1. La contraposée de n premier $\Rightarrow n = 2$ ou n est impair est : n pair et $n \neq 2 \Rightarrow n$ non premier.

   Démonstration. Si n pair et $n \neq 2$ alors 2 divise n donc n n'est pas premier. □

2. La contraposée de $(xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \quad et \quad y \neq 0)$ est : $x = 0$ ou $y = 0 \Rightarrow xy = 0$, démonstration triviale.

3. La contraposée de $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$ est : $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow x = y$

   Démonstration. Si $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$, si on développe on trouve $xy - x + y = xy + x - y$ donc $2x = 2y$, d'où $x = y$. □

Exercice 1.9 :

1. La contraposée de n^2 pair $\Rightarrow n$ pair est : n impair$\Rightarrow n^2$ impair.

   Démonstration. Soit n impair, on peut l'écrire $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{Z}$, donc

$$\begin{aligned} n^2 = (2p+1)^2 &= 4p^2 + 4p + 1 \\ &= 2(2p^2 + 2p) + 1 \\ &= 2q + 1; q = 2p^2 + 2p, q \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

   alors n^2 est impair. □

2. La contraposée de $x \neq 2$ et $y \neq 2 \Rightarrow xy - 2x - 2y + 4 \neq 0$ est : $xy - 2x - 2y + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $y = 2$

Démonstration. Si $xy - 2x - 2y + 4 = 0$ alors $(x-2)(y-2) = 0$ ce qui implique que $x - 2 = 0$ ou $y - 2 = 0$, d'où $x = 2$ ou $y = 2$. $\square$

Exercice 1.10 : Montrons par l'absurde

$\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

-Montrons premièrement que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel alors $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$,(p, q ont le même signe) avec p et p sont premier entre eux alors $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow p^2 = 2q^2$ ce qui implique que p^2 est pair et d'après l'exercice précédent on a montré que si p^2 est pair alors p est pair, donc $\exists p' \in \mathbb{N}, p = 2p'$ or nous avons $p^2 = 2q^2$ donc $4p'^2 = 2q^2$ est par suite $q^2 = 2p'^2$ donc q^2 est pair ce qui implique que q est pair, alors $\exists q' \in \mathbb{N}, q = 2q'^2$, en conclusion $\frac{p}{q} = \frac{2p'}{2q'}$ ce qui contredit que p et q sont premier entre eux car il existe un diviseur commun entre p et q (2) (contradiction). alors $\sqrt{2}$ est irrationnel.

-$\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.

On procède la même façon que la question précédente, par l'absurde on suppose que $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est rationnel alors $\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, p et q sont premier entre eux. Alors $\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q}$ est rationnel, donc $\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q} \Rightarrow q\ln(2) = p\ln(3) \Rightarrow 2^q = 3^p$.

Si $q \geq 1$ alors 2 divise 3^p, et par suite 2 divise 3 absurde.

On en déduit que $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.

Exercice 1.11 : Montrons par récurrence les deux propositions

1. $P(n) : \sum\limits_{k=1}^{n} K = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

   (a) vérifiant que P(1) est vraie : pour $n = 1$, on a bien que $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

   (b) Supposons que $P(n)$ est vraie (Hypothèse de récurrence : $\sum\limits_{k=1}^{n} K = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$) et montrons que $P(n+1)$ est aussi vraie.

Il faut montrer que $\sum_{k=1}^{n+1} K = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} K &= \underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + n}_{P(n)} + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1, \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Alors pour tout entier naturel supérieur ou égale à 1 on a : $\sum_{k=1}^{n} K = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $P(n) : \sum_{k=1}^{n} K^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   (a) vérifiant que P(1) est vraie : pour $n = 1$, on a bien que $1^2 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}$

   (b) Supposons que $P(n)$ est vraie (Hypothèse de récurrence : $\sum_{k=1}^{n} K^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$) et montrons que $P(n+1)$ est aussi vraie.

   Il faut montrer que $\sum_{k=1}^{n+1} K^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} K^2 &= \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}_{P(n)} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2, \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}, \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}, \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Alors pour tout entier naturel supérieur ou égale à 1 on a : $\sum_{k=1}^{n} K^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1.3 Exercices supplémentaires

Exercice 1.12 : Soient P, Q et R trois propositions données.

1. En utilisant la table de vérité, vérifier que les propositions suivantes sont vraies
   (a) $\overline{(P \Rightarrow Q) \vee R} \Leftrightarrow (P \wedge \bar{R}) \wedge \bar{Q}$
   (b) $(\bar{P} \wedge \bar{Q}) \Leftrightarrow \overline{(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q}$.
2. Ecrire la négation de $(\overline{(P \vee Q)} \Rightarrow R) \Rightarrow P$, $((P \vee Q) \Rightarrow \overline{R}) \Rightarrow (Q \wedge R)$.

Exercice 1.13 : Les propositions suivantes sont-elles vrais ou fausses ?

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 2n$.
2. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x > 2n$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, si $x^2 = y^2$ alors $x = y$
4. Pour tout $x \in \mathbb{N}$, pour tout $y \in \mathbb{N}$, si $x^2 = y^2$ alors $x = y$

Exercice 1.14 : Montrer par récurrence ce qui suit

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} K^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$.
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} (2K - 1) = n^2$.

Exercice 1.15 :

1. Démontrer que pour tout entier n, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier.
2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

Chapitre 2

Ensembles et Applications

2.1 Exercices

Exercice 2.1 : Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. Simplifier l'expression $F = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$, où $\overline{A}, (\overline{B})$ est le complémentaire de $A, (B)$ dans E.
2. Montrer que si $A \cup B = A \cap B$, alors $A = B$.
3. Montrer que si $A \cup B = B \cap C$, alors $A \subset B \subset C$.
4. Montrer que $\begin{cases} A \cup B & = & A \cup C \\ A \cap B & = & A \cap C \end{cases} \Leftrightarrow B = C$.

Exercice 2.2 : Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On définit la différence symétrique de A et de B, notée $A \Delta B$ par : $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

1. Que valent $A \Delta A$ et $A \Delta \emptyset$?
2. Montrer que $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.
3. Montrer que $A \Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.
4. Montrer que $(A \Delta B) \Delta B = A$.

5. Vérifier que $\overline{A \Delta B} = \overline{A} \Delta B = A \Delta \overline{B}$ et $\overline{A} \Delta \overline{B} = A \Delta B$.

Exercice 2.3 : Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : A \to B$ une application donnée par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.
Déterminer A et B pour que f soit bijective et donner dans ce cas l'expression de f^{-1}.

Exercice 2.4 : Soit E l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, et f une application définie par : $\begin{array}{cccc} f & : & E & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & & A & \longmapsto & f(A) \end{array}$ telle que $f(\emptyset) = 0$ et $f(A) = \sum_{k \in A} k$ si $A \neq \emptyset$.

1. Soit $A_n = \{0, 1, \cdots, n\}$. Calculer $f(A_n)$.
2. Montrer que f est surjective.
3. f est-elle injective ?
4. Déterminer $f^{-1}(\{3\})$.

Exercice 2.5 : Soient f et g deux applications de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies par : $f(n) = 2n$ et
$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & si \quad n \quad est \quad pair, \\ \frac{n-1}{2} & si \quad n \quad est \quad impair. \end{cases}$$

1. Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g.
2. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 2.6 : Soit $f : E \to F$ une application. A, B deux sous-ensembles de E et C, D deux sous-ensembles F . Montrer que :

1. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2. Si f est injective alors. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
3. $f(\overline{A}) = \overline{f(A)} \Leftrightarrow f$ bijective.

Exercice 2.7 : Soient E un ensemble et f une application de $P(E)$ dans $\mathbb{R}$, telle que pour toutes parties disjointes A et B de E, on ait $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$.

1. Montrer que $f(\emptyset) = 0$.
2. Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a $f(A \cup B) + f(A \cap B) = f(A) + f(B)$.

Exercice 2.8 : On considère deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

2.2 Solutions

Exercice 2.1 : Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1.

$$
\begin{aligned}
F &= (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \\
&= (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \\
&= [\overline{A} \cap (B \cup \overline{B})] \cup (A \cap B) \\
&= \overline{A} \cup (A \cap B) \\
&= (\overline{A} \cup A) \cap (\overline{A} \cup B) \\
&= E \cap (\overline{A} \cup B) \\
&= \overline{A} \cup B
\end{aligned}
$$

2. Montrons que si $A \cup B = A \cap B$, alors $A = B$.
   Pour montrer l'égalité entre deux ensembles il est souvent pratique de montrer une double inclusion, en effet

   (a) Montrons que $A \subset B$
   Soit $x \in A$ donc $x \in A \cup B$ or par hypothèse on a $A \cup B = A \cap B$, donc $x \in A \cap B$ et par suite $x \in B$, d'où $A \subset B$

   (b) Montrons que $B \subset A$
   Soit $x \in B$ donc $x \in A \cup B$ et par hypothèse on a $A \cup B = A \cap B$ alors $x \in A \cap B$ et par suite $x \in A$, donc $B \subset A$.

   D'où l'égalité.

3. Montrons que si $A \cup B = B \cap C$, alors $A \subset B \subset C$.
   On sait que $A \subset A \cup B$ or $A \cup B = B \cap C$, donc $A \subset B \cap C$ et par suite $A \subset B$, d'un autre coté on sait que $B \subset A \cup B$ or $B \cap C = A \cup B$, donc $B \subset B \cap C$, et par suite $B \subset C$, D'où $A \subset B \subset C$

4. Montrons que $\begin{cases} A\cup B &= A\cup C \\ A\cap B &= A\cap C \end{cases} \Leftrightarrow B=C.$

 -$'' \Leftarrow ''''$ évident.

 -$'' \Rightarrow ''$

 Montrons d'abord que $B\subset C$

 Soit $x\in B \Rightarrow x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A\cup C \Rightarrow \{x\in A \vee x\in C\}$

 -Si $x\in C$ alors nous avons montrer que $x\in B\Rightarrow x\in C$, d'où $B\subset C$.

 -Si $x\in A$ comme $x\in B$ alors $x\in A\cap B$ d'après hypothèse on obtient que $x\in A\cap C$, donc $x\in C$, alors nous avons montrer que $x\in B\Rightarrow x\in C$, d'où $B\subset C$.

 Montrons que $C\subset B$.

 D'après la première inclusion on a $A\cap X=A\cap Y$ et $A\cup X=A\cup Y\Rightarrow X\subset Y$, donc $A\cap B=A\cap C$ et $A\cup B=A\cup C \Leftrightarrow A\cap C=A\cap B$ et $A\cup C=A\cup B\Rightarrow C\subset B$

Exercice 2.2 : Soit E un ensemble, A et B deux parties de E.

Tout d'abord il faut rappeler que $A\backslash B=A\cap\overline{B}$, donc $A\Delta B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)=(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}$.

1. $A\Delta A$ et $A\Delta\emptyset$

$$A\Delta A=(A\cup A)\cap\overline{(A\cap A)}=A\cap\overline{A}=\emptyset$$

$$A\Delta\emptyset=(A\cup\emptyset)\cap\overline{(A\cap\emptyset)}=A\cap E=A$$

2. $A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)} \\ &= (A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B}) \\ &= [(A\cup B)\cap\overline{A}]\cup[((A\cup B)\cap\overline{B})] \\ &= [(A\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{A})]\cup[(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{B})] \\ &= (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})=(A\backslash B)\cup(B\backslash A) \end{aligned}$$

3. $(A\Delta B)\Delta B = A$.

$$\begin{aligned}
(A\Delta B)\Delta B &= ((A\Delta B)\cup B)\cap\overline{((A\Delta B)\cap B)} \\
&= [(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\cup B]\cap\overline{[(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\cap B]} \\
&= [(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\cup B]\cap\overline{[(A\cup B)\cap B\cap(\overline{A}\cup\overline{B})]} \\
&= [(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\cup B]\cap\overline{[B\cap(\overline{A}\cup\overline{B})]} \\
&= [(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\cup B]\cap\overline{[(B\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{B})]} \\
&= [(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\cup B]\cap\overline{(B\cap\overline{A})} \\
&= [(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\cup B]\cap(\overline{B}\cup A) \\
&= [((A\cup B)\cup B)\cap((\overline{A}\cup\overline{B})\cup B)]\cap(\overline{B}\cup A) \\
&= ((A\cup B)\cap E)\cap(\overline{B}\cup A) \\
&= (A\cup B)\cap(\overline{B}\cup A) \\
&= A\cup(B\cap\overline{B}) = A
\end{aligned}$$

4. $\overline{A\Delta B} = \overline{A}\Delta B = A\Delta\overline{B}$ et $\overline{A}\Delta\overline{B} = A\Delta B$.

$$\begin{aligned}
\overline{A\Delta B} &= \overline{(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})} \\
&= \overline{(A\cup B)}\cup(A\cap B) \\
&= (\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cap B) \\
&= [(\overline{A}\cap\overline{B})\cup A]\cap[(\overline{A}\cap\overline{B})\cup B] \\
&= [(\overline{A}\cup A)\cap(\overline{B}\cup A)]\cap[(\overline{A}\cup B)\cap(\overline{B}\cup B)] \\
&= (\overline{B}\cup A)\cap(\overline{A}\cup B) \\
&= (\overline{A}\cup B)\cap\overline{(\overline{A}\cap B)} = \overline{A}\Delta B.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{A\Delta B} &= (\overline{A}\cup B)\cap(\overline{B}\cup A) \\
&= (\overline{B}\cup A)\cap\overline{(A\cap\overline{B})} \\
&= (A\cup\overline{B})\cap\overline{(A\cap\overline{B})} = A\Delta\overline{B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{A}\Delta\overline{B} &= \overline{(A\Delta B\Delta B)}\Delta\overline{B} \\ &= (A\Delta B)\Delta\underbrace{\overline{B}\Delta\overline{B}}_{\emptyset} \\ &= A\Delta B\end{aligned}$$

Exercice 2.3 : Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : A \to B$ une application donnée par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

Déterminons A et B pour que f soit bijective.

-Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

-f est bijective si est seulement si f est injective et surjective.

-Soit f est injective.

f injective si est seulement si $\forall x_1, x_2 \in D_f, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

$$\begin{aligned}\text{Soient} \quad x_1, x_2 \in D_f, \tfrac{2x_1+1}{x_1-1} = \tfrac{2x_2+1}{x_2-1} &\Rightarrow (2x_1+1)(x_2-1) = (2x_2+1)(x_1-1) \\ &\Rightarrow 2x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 1 = 2x_2x_1 - 2x_2 + x_1 - 1 \\ &\Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2\end{aligned}$$

Alors $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{1\}, f$ est injective.

-Soit f est surjective.

f est surjective si est seulement si $\forall y \in Im(f), \exists x \in D_f / y = f(x)$.

$$\begin{aligned}y = \tfrac{2x+1}{x-1} &\Rightarrow y(x-1) = 2x+1 \\ &\Rightarrow xy - y = 2x + 1 \\ &\Rightarrow x(y-2) = y + 1\end{aligned}$$

Si $y = 2$ alors x n'existe pas.

Si $y \neq 2$ alors $x = \frac{y+1}{y-2}$.

Ainsi f est bijective de $\mathbb{R} - \{1\}$ vers $\mathbb{R} - \{2\}$.

L'application f^{-1} est définit tel que .

$$\begin{array}{rcccl} f^{-1} & : & \mathbb{R}-\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}-\{1\} \\ & & y & \longmapsto & f^{-1}(y)=\frac{y+1}{y-2} \end{array}$$

Exercice 2.4 : Soit E l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, et f une application définie par : $\begin{array}{rcccl} f & : & E & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & & A & \longmapsto & f(A) \end{array}$ telle que $f(\emptyset)=0$ et $f(A)=\sum_{k\in A} k$ si $A\neq\emptyset$.

1. Soit $A_n=\{0,1,\cdots,n\}$. Calculons $f(A_n)$.

$$f(A_n)=0+1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

2. Montrons que f est surjective.

   f est surjective si est seulement si $\forall n\in\mathbb{N},\exists A\in E, f(A)=n$

   On prend $A=\{n\}$, alors $f(A)=n$, donc $\forall n\in\mathbb{N},\exists A=\{n\}\in E \quad tq \quad f(A)=n$, ce qui implique que f est surjective.

3. f est-elle injective ?

   Soient $A_1=\{0,1,2\}$ et $A_2=\{1,2\}$, alors on a $f(A_1)=f(A_2)=3$ mais $A_1\neq A_2$, d'où f n'est pas injective.

4. Déterminons $f^{-1}(\{3\})$.

   $f^{-1}(\{3\})=\{A\in E/f(A)=3\}=\{\{0,1,2\},\{1,2\},\{0,3\},\{3\}\}$

Exercice 2.5 : Soient f et g deux applications de $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ définies par : $f(n)=2n$ et

$$g(n)=\begin{cases} \frac{n}{2} & si \quad n \quad est \quad pair, \\ \frac{n-1}{2} & si \quad n \quad est \quad impair. \end{cases}$$

1. -L'injectivité de f

$$\begin{aligned} \forall x_1,x_2\in\mathbb{N}, f(x_1)=f(x_2) &\Rightarrow 2x_1=2x_2 \\ &\Rightarrow x_1=x_2 \end{aligned}$$

   D'où f est injective.

-La surjectivité de f

f n'est pas surjective car les nombre impair ne possèdent aucun antécédent dans $\mathbb{N}$.Donc f n'est pas bijective.

-L'injectivité de g.

Il est évident que g n'est pas injective, comme montre le contre exemple suivant : Soient $n_1 = 4$ et $n_2 = 5$, alors $g(n_1) = g(n_2) = 2$ mais $n_1 \neq n_2$.

-La surjectivité de g

Soit $m \in \mathbb{N}$ si $m = \frac{n}{2}$ alors $n = 2m \in \mathbb{N}$, et si $m = \frac{n-1}{2}$ alors $n = 2m + 1 \in \mathbb{N}$, alors $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} / g(n) = m$, d'où f est surjective.

Donc g n'est pas bijective.

2. Calculons $f \circ g$ et $g \circ f$.

   $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2n) = \frac{2n}{2} = n$ car f est pair.

   $$f \circ g(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 2(\frac{n}{2}) & si \quad n \quad est \quad pair, \\ 2(\frac{n-1}{2}) & si \quad n \quad est \quad impair. \end{cases}$$

   $$f \circ g(x) = \begin{cases} n & si \quad n \quad est \quad pair, \\ n-1 & si \quad n \quad est \quad impair. \end{cases}$$

Exercice 2.6 : Soit $f : E \to F$ une application. A, B deux sous-ensembles de E et C, D deux sous-ensembles F . Montrons que :

1. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

   Si $y \in f(A \cap B)$ alors $y = f(x)$ où $x \in A \cap B$, donc x est dans A alors $f(x) = y \in f(A)$ et x est dans B donc $f(x) = y \in f(B)$, il en résulte que y se trouve dans $f(A)$ et $f(B)$ alors $y \in f(A) \cap f(B)$, d'où l'inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

2. Si f est injective alors. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

   Si f est injective et si $y \in f(A) \cap f(B)$ alors on a y est dans $f(A)$ donc il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$ et on a aussi y dans $f(B)$, donc il existe x' dans B tel

que $y = f(x')$, alors on obtient que $f(x) = f(x')$ et puisque f est injective on en déduit que $x = x'$, donc appartient à $A \cap B$, donc $y \in f(A \cap B)$, d'où l'inclusion $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
D'après la question précédente on a $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, d'où l'égalité.

3. $f(\overline{A}) = \overline{f(A)} \Leftrightarrow f$ bijective.
- "$\Rightarrow$" : Supposons que f est bijective , prenons A un élément de $P(E)$ on doit montrer une double inclusion ,
Soit $y \in f(\overline{A})$, alors il existe $x \in \overline{A}$ tel que $y = f(x)$.
Supposons que $y \in f(A)$ alors $y = f(z)$ où $z \in A$, alors $f(x) = f(z)$ est par l'injectivité de f on obtient que $x = z$, comme $x \in \overline{A}$ et $z \in A$ alors cette égalité est impossible et donc $y \notin f(A)$ ce qui implique que $y \in \overline{f(A)}$.
Montrons maintenant l'autre inclusion, soit $y \in \overline{f(A)}$, puisque f est surjective alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ mais $x \notin A$ car sinon $x \in f(A)$ ce qui n'est pas vrais. Donc $x \in \overline{A}$ et $y \in f(\overline{A})$.
-"$\Leftarrow$ ” : Montrons que f est injective et surjective :
-L'injectivité de f
Supposons que $x \neq y$ et posons $A = \{x\}$, on a $y \in \overline{A}$ donc $f(y) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ or $f(A) = \{f(x)\}$ donc $f(x) \neq f(y)$. D'où l'injectivité de f.
Montrons maintenant que f est surjective, si $A = E$, on sait que $f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$ mais $f(\overline{E}) = f(\emptyset) = \emptyset$, donc $\overline{f(E)} = \emptyset \Leftrightarrow \overline{\overline{f(E)}} = \overline{\emptyset} \Leftrightarrow f(E) = F$ C'est-à-dire f est surjective.

Exercice 2.7 : Soient E un ensemble et f une application de $P(E)$ dans $\mathbb{R}$, telle que pour toutes parties disjointes A et B de E, on ait $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$.

1. Montrons que $f(\emptyset) = 0$.
Soient $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$ puisque A et B sont disjoints alors on a $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$, donc $f(\emptyset) = f(\emptyset) + f(\emptyset)$, alors $f(\emptyset) = 0$.

2. Montrons que pour toutes parties A et B de E, on a $f(A \cup B) + f(A \cap B) =$

$f(A) + f(B)$.

- Si A et B sont disjoints (évident).

- Si $A \subset B$ ou $B \subset A$ (évident).

Posons $A_1 = A \backslash B$ et $B_1 = B \backslash A$, alors A_1 et $A \cap B$ et B_1 sont des partions de $A \cup B$ et ils sont disjoints, donc

$$\begin{array}{rcl} f(A \cup B) & = & f(A_1 \cup (A \cap B) \cup B_1) \\ & = & f(A_1) + f((A \cap B) \cup B_1) \\ & = & f(A_1) + f(A \cap B) + f(B_1) \end{array}.$$

On a $A = A_1 \cup (A \cap B)$ et $B = B_1 \cup (A \cap B)$, alors $f(A) = f(A_1) + f(A \cap B)$ et $f(B) = f(B_1) + f(A \cap B)$, donc

$$\begin{array}{rcl} f(A \cup B) & = & f(A_1) + f(A \cap B) + f(B_1) \\ & = & f(A) - f(A \cap B) + f(A \cap B) + f(B) - f(A \cap B) \end{array}.$$

On en déduit que $f(A \cup B) + f(A \cap B) = f(A) + f(B)$.

Exercice 2.8 : On considère deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Montrons que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

   Soient $y, y' \in F, g(y) = g(y')$ alors $\exists x, x' \in E, y = f(x)$ et $y' = f(x')$ car f est surjective, donc

   $$\begin{array}{rcl} g(f(x)) = g(f(x')) & \Rightarrow & g \circ f(x) = g \circ f(x') \\ & \Rightarrow & x = x' \quad \text{car} \quad g \circ f \quad \text{est injective} \\ & \Rightarrow & f(x) = f(x') \quad \text{car} \quad f \quad \text{est une application} \\ & \Rightarrow & y = y' \end{array}$$

   D'où f est injective.

2. Montrons que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

   $$\begin{array}{rcl} \text{Soit} \quad y \in F & \Rightarrow & g(y) \in G \quad et \quad g \circ f \quad \text{surjective} \\ & \Rightarrow & \exists x \in E, g(y) = g \circ f(x) \\ & \Rightarrow & \exists x \in E, g(y) = g(f(x)) \end{array}$$

Puisque g est injective alors $y = f(x)$, d'où f est surjective.

2.3 Exercices supplémentaires

Exercice 2.9 : Donner la liste des éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1,2\}))$.

Exercice 2.10 : Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. Montrer que $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.
2. Montrer que $A \backslash B = A \Leftrightarrow B \backslash A = B$.
3. Montrer que si $A \Delta B = A \cap B$, alors $A = B = \emptyset$.

Exercice 2.11 : Soit $f : E \to E$ une application, et soit

$$S = \{X \subset E \quad t.q \quad f^{-1}(f(X)) = X\}.$$

1. Soit $A \subset E$, montrer que $f^{-1}(f(X)) \in S$.
2. Soit $A, B \in S$, montrer que $A \cup B \in S$ et $A \cap B \in S$.

Exercice 2.12 : Soit l'application f de $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par :

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & si \quad n \quad est \quad pair, \\ -\frac{n+1}{2} & si \quad n \quad est \quad impair. \end{cases}$$ Montrer que f est bijective.

Exercice 2.13 :

1. Soient E, F, G trois ensembles, on considère $f_1, f_2 : E \to F$ et $g : F \to G$ trois applications telles que $g \circ f_1 = g \circ f_2$ et g injective. Montrer que $f_1 = f_2$.
2. Soient E, F, G trois ensembles, on considère $f : E \to F$ et $g_1, g_2 : F \to G$ trois applications telles que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ et f surjective. Montrer que $g_1 = g_2$.
3. Soit $f : E \to E$ une application telles que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si, f est surjective.
4. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 2.14 : On considère l'application $f : E \to F$. Montrer que

1. f est injective si et seulement si $f^{-1}(f(A)) = A$, pour toute partie A de E.
2. f est surjective si et seulement si $f(f^{-1}(B)) = B$, pour toute partie B de F.
3. Montrer que $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$. Etudier le cas où f est surjective.

Exercice 2.15 : On considère une application $f : E \to E$ telle que $f(f(E)) = E$. Montrer que f est surjective.

Exercice 2.16 : Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Pour tout élément $x \in E$, on définit la partie $\phi(x) = \{t \in E/(t \leq x)\}$.

1. Démontrer que $\forall x, y \in E, x \leq y \Rightarrow \phi(x) \subset \phi(y)$.
2. Démontrer que ϕ est une application injective de E dans $P(E)$.
3. Réciproquement soit ϕ est une application injective de E dans $P(E)$. On définit la relation $\mathcal{R}$ par : $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Rightarrow \phi(x) \subset \phi(y)$. Montrer que $\mathcal{R}$ ainsi définie est une relation d'ordre.

Exercice 2.17 : Soit E un ensemble ordonné possédant un élément minimum et dans lequel toute partie non vide admet une borne supérieure. Soit f une application croissante de E dans E.

1. Montrer que l'ensemble $X = \{x \in E/(x \leq f(x))\}$ est non vide.
2. Montrer que la borne supérieure a de X vérifie $f(a) = a$.

Chapitre 3

Relations, Structures algébriques

3.1 Exercices

Exercice 3.1 : Soit E un ensemble et soit A une partie de E. On définit dans $P(E)$ la relation suivante : $X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y$, pour tout X et Y dans $P(E)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Expliciter les classes d'équivalences des parties suivantes $\emptyset, E, A, C_E^A$.

Exercice 3.2 : On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow xy = x'y'.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Quelle est la classe d'équivalence de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (si $xy = 0$ et si $xy \neq 0$) ?

Exercice 3.3 : Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

est une relation d'équivalence. Déterminer la classe de x, pour $x \in \mathbb{R}$, en déduire l'ensemble quotient.

Exercice 3.4 : On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, cet ordre est-il total ?

Exercice 3.5 : On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*/y = x^n$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, cet ordre est-il total ? Déterminer les majorants de $\{2, 3\}$ pour cet ordre.

Exercice 3.6 : On définit une loi de composition interne $*$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$a * b = \ln(e^a + e^b); \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

1. Etudier l'associativité et la commutativité de cette loi.
2. Possède-t-elle un élément neutre ?

Exercice 3.7 : Soit $E = [0, 1]$. On définit une loi $*$ sur E par :

$$x * y = x + y - xy; \quad \forall x, y \in E.$$

1. Montrer que $*$ est une loi de composition interne commutative et associative.
2. Montrer que la loi $*$ possède un élément neutre.
3. Quels sont les éléments symétrisables ? réguliers ?

Exercice 3.8 : Soit $(G, .)$ un groupe tel que $x^2 = x.x = e, \forall x \in G$.
-Montrer que G est commutatif.

Exercice 3.9 : Soit $(A, +, \times)$ un anneau de Boole c'est -à-dire un anneau non nul tel que $x^2 = x, \forall x \in A. (x^2 = x \times x)$

1. Montrer que $(x \times y) + (y \times x) = 0; \forall x, y \in A$.
2. En déduire que $x + x = 0_A, \forall x \in A$ et que l'anneau est commutatif.
3. Montrer que la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur A par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y \times x = x$ est une relation d'ordre.
4. Montrer que $x \times y \times (x + y) = 0_A, \quad \forall x, y \in A$. En déduire qu'un anneau de Boole intègre ne peut avoir que deux éléments.

Exercice 3.10 : Soit $(E, *)$ un groupe. Un élément $x \in E$ est dit idempotent si et seulement si $x * x = x$.

1. Montrer que si x et y sont idempotents et commutent, alors $x * y$ est idempotent.
2. Montrer que si x est idempotent, alors x^{-1} est idempotent.

Exercice 3.11 : On munit $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de deux lois définies par :

$$(x, y) * (x', y') = (x + x', y + y') \quad et \quad (x, y)\Delta(x', y') = (xx', xy' + x'y)$$

1. Montrer que $(A, *)$ est un groupe abélien.
2. Montrer que Δ est une loi commutative et associative.
3. Déterminer l'élément neutre de A pour la loi Δ.
4. Montrer que $(A, *, \Delta)$ est un anneau commutatif.

Exercice 3.12 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit l'application $f : (\mathbb{R}^*, \times) \to (\mathbb{R}^*, \times)$ définie par $f(x) = x^n$.
-Montrer que f est un endomorphisme du groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$ et déterminer son noyau et son image.
Exercice 3.13 : Soit $f : (G, *) \to (G', \Delta)$ un homomorphisme de groupes.

1. Montrer que $Kerf$ est un sous groupe de G.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $Kerf = \{e_G\}$.
3. Montrer que Imf est un sous groupe de G'.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si $Imf = G'$.

3.2 Solutions

Exercice 3.1 : Soit E un ensemble et soit A une partie de E. On définit dans $P(E)$ la relation suivante : $X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow A\cap X = A\cap Y$, pour tout X et Y dans $P(E)$.

1. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

$$A\cap X = A\cap X \Leftrightarrow X\mathcal{R}X$$

$\mathcal{R}$ est réflexive.

$$\begin{aligned} X\mathcal{R}Y &\Leftrightarrow A\cap X = A\cap Y \\ &\Leftrightarrow A\cap Y = A\cap X \\ &\Leftrightarrow Y\mathcal{R}X \end{aligned}$$

$\mathcal{R}$ est symétrique.

$$\begin{aligned} \begin{cases} X\mathcal{R}Y \\ Y\mathcal{R}Z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} A\cap X = A\cap Y \\ A\cap Y = A\cap Z \end{cases} \\ &\Rightarrow A\cap X = A\cap Z \\ &\Rightarrow X\mathcal{R}Z \end{aligned}$$

$\mathcal{R}$ est transitive.

Finalement $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Classes d'équivalences de $\emptyset, E, A, C_E^A$.

$Cl(\emptyset) = \{X\in\mathcal{P}(E), X\mathcal{R}\emptyset\}$

$$\begin{aligned} X\mathcal{R}\emptyset &\Leftrightarrow A\cap X = A\cap\emptyset \\ &\Leftrightarrow A\cap X = \emptyset \Rightarrow X\subseteq \overline{A} \end{aligned}$$

$Cl(\emptyset) = \{X\in\mathcal{P}(E), X\subseteq\overline{A}\}$

$$Cl(E) = \{X \in \mathcal{P}(E), X\mathcal{R}E\}$$

$$\begin{aligned} X\mathcal{R}E &\Leftrightarrow A \cap X = A \cap E \\ &\Leftrightarrow A \cap X = A \Rightarrow A \subseteq X \end{aligned}$$

$$Cl(E) = \{X \in \mathcal{P}(E), A \subseteq X\}$$
$$Cl(A) = \{X \in \mathcal{P}(E), X\mathcal{R}A\}$$

$$\begin{aligned} X\mathcal{R}A &\Leftrightarrow A \cap X = A \cap A \\ &\Leftrightarrow A \cap X = A \Rightarrow A \subseteq X \end{aligned}$$

$$Cl(A) = \{X \in \mathcal{P}(E), A \subseteq X\}$$
$$Cl(\overline{A}) = \{X \in \mathcal{P}(E), X\mathcal{R}\overline{A}\}$$

$$\begin{aligned} X\mathcal{R}\overline{A} &\Leftrightarrow A \cap X = A \cap \overline{A} \\ &\Leftrightarrow A \cap X = \emptyset \Rightarrow X \subseteq \overline{A} \end{aligned}$$

$$Cl(\overline{A}) = \{X \in \mathcal{P}(E), X \subseteq \overline{A}\}$$

Exercice 3.2 : On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow xy = x'y'.$$

- Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

$$xy = xy \Leftrightarrow (x,y)\mathcal{R}(x,y)$$

$\mathcal{R}$ est réflexive.

$$\begin{aligned} (x,y)\mathcal{R}(x',y') &\Leftrightarrow xy = x'y' \\ &\Leftrightarrow x'y' = xy \\ &\Leftrightarrow (x',y')\mathcal{R}(x,y) \end{aligned}$$

$\mathcal{R}$ est symétrique.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} (x,y)\mathcal{R}(x',y') \\ (x',y')\mathcal{R}(x'',y'') \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} xy = x'y' \\ x'y' = x''y'' \end{cases} \\
&\Rightarrow xy = x''y'' \\
&\Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(x'',y'')
\end{aligned}$$

$\mathcal{R}$ est transitive.

Finalement $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

-Classes d'équivalences si $xy = 0$.

$Cl(x,y) = \{(x',y') \in \mathbb{R}^2, (x,y)\mathcal{R}(x',y')\}$

$$\begin{aligned}
(x,y)\mathcal{R}(x',y') &\Leftrightarrow xy = x'y' \\
&\Leftrightarrow x'y' = 0 \Rightarrow (x' = 0 \wedge y' \in \mathbb{R}) \vee (y' = 0 \wedge x' \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

$Cl(x,y) = \{(0,b), b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a,0), a \in \mathbb{R}\}$

-Classes d'équivalences si $xy \neq 0$.

$Cl(x,y) = \{(x',y') \in \mathbb{R}^2, (x,y)\mathcal{R}(x',y')\}$

$$\begin{aligned}
(x,y)\mathcal{R}(x',y') &\Leftrightarrow xy = x'y' \\
&\Leftrightarrow x'y' \neq 0 \Rightarrow x' \neq 0 \wedge y' \neq 0
\end{aligned}$$

$Cl(x,y) = \{(a,b), a, b \in \mathbb{R}^*\}$.

Exercice 3.3 : Montrons que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

est une relation d'équivalence.

$$\begin{aligned}
x^2 - x^2 = 0 \wedge x - x = 0 &\Leftrightarrow x^2 - x^2 = x - x \\
&\Leftrightarrow x\mathcal{R}x
\end{aligned}$$

$\mathcal{R}$ est réflexive.

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \\ &\Leftrightarrow -(y^2 - x^2) = -(y - x) \\ &\Leftrightarrow y^2 - x^2 = y - x \\ &\Leftrightarrow y\mathcal{R}x \end{aligned}$$

$\mathcal{R}$ est symétrique.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x - y \\ y^2 - z^2 = y - z \end{cases} \\ &\Rightarrow x^2 - z^2 = x - z \\ &\Rightarrow x\mathcal{R}z \end{aligned}$$

$\mathcal{R}$ est transitive.

Finalement $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

-Classe d'équivalence de x pour $x \in \mathbb{R}$.

$Cl(x) = \{y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y\}$.

On cherche donc l'ensemble des y satisfaisant,

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = x - y &\Rightarrow (x-y)(x+y) = (x-y) \\ &\Rightarrow (x-y)(x+y) - (x-y) = 0 \\ &\Rightarrow (x-y)[(x+y)-1] = 0 \Rightarrow y = x \vee y = 1 - x. \end{aligned}$$

$Cl(x) = \{x, 1-x\}$

Sauf si $x = 1 - x$ alors $x = \frac{1}{2}$, $Cl(\frac{1}{2}) = \{\frac{1}{2}\}$.

L'ensemble quotient est l'ensemble des classes d'équivalence :

$$\mathbb{R}/\mathcal{R} = \{\{x, (1-x)\}, x \geq \frac{1}{2}\}$$

On est obligé de considérer $x \geq \frac{1}{2}$(ou $x \leq \frac{1}{2}$), car pour $x \geq \frac{1}{2}, 1 - x \leq \frac{1}{2}$ donc si on considère $x \in \mathbb{R}$, on écrirait deux fois chaque classe.

Exercice 3.4 : On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre,

$$\frac{x}{x} = 1 \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow x\mathcal{R}x$$

$\mathcal{R}$ est réflexive.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} \in \mathbb{N}^* \\ \frac{y}{x} \in \mathbb{N}^* \end{cases} \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

$\mathcal{R}$ est antisymétrique.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} \in \mathbb{N}^* \\ \frac{y}{z} \in \mathbb{N}^* \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{x}{y} \times \frac{y}{z} \in \mathbb{N}^* \\ &\Rightarrow \frac{x}{z} \in \mathbb{N}^* \\ &\Rightarrow x\mathcal{R}z \end{aligned}$$

$\mathcal{R}$ est transitive.

Finalement $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

Etudiant la nature de l'ordre

L'ordre est total si $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$, donc

$\exists \underbrace{x}_{=2}, \underbrace{y}_{=3} \in \mathbb{R}^*, \overline{x\mathcal{R}y} \wedge \overline{y\mathcal{R}x}, \quad Car \quad \frac{2}{3}, \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}^*$, alors

$\exists \underbrace{x}_{=2}, \underbrace{y}_{=3} \in \mathbb{R}^*, \overline{x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x}$, donc $\overline{\forall x, y \in \mathbb{R}^*, x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x}$.

Donc l'ordre n'est pas total, d'où l'ordre est partiel.

Exercice 3.5 : On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*/y = x^n$. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre,

$$\exists \underbrace{n}_{=1} \in \mathbb{N}^*, x^n = x \Leftrightarrow x\mathcal{R}x$$

$\mathcal{R}$ est réflexive.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n = y \\ \exists n' \in \mathbb{N}^*, y^{n'} = x \end{cases} \\
&\Rightarrow \exists n, n' \in \mathbb{N}^*(x^n)^{n'} = x \\
&\Rightarrow \exists n, n' \in \mathbb{N}^* x^{nn'} = x \\
&\Rightarrow \exists n, n' \in \mathbb{N}^* x^{nn'} - x = 0 \\
&\Rightarrow \exists n, n' \in \mathbb{N}^* x(x^{nn'-1} - 1) = 0 \\
&\Rightarrow nn' - 1 = 0 \Rightarrow n = n' = 1 \\
&\Rightarrow x = y
\end{aligned}$$

$\mathcal{R}$ est antisymétrique.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n = y \\ \exists n' \in \mathbb{N}^*, y^{n'} = z \end{cases} \\
&\Rightarrow \exists n, n' \in \mathbb{N}^*(x^n)^{n'} = z \\
&\Rightarrow \exists n'' = nn' \in \mathbb{N}^* x^{n''} = z \\
&\Rightarrow x\mathcal{R}z
\end{aligned}$$

$\mathcal{R}$ est transitive.

Finalement $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

Etudiant la nature de l'ordre

L'ordre est total si $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$, donc

Pour $x = 2$ et $y = 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n \neq 3 \Rightarrow \overline{2\mathcal{R}3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3^n \neq 2 \Rightarrow \overline{3\mathcal{R}2}$, donc

$\exists x, y \in \mathbb{N}^*, \overline{x\mathcal{R}y} \wedge \overline{y\mathcal{R}x}$ ce qui implique que $\overline{\forall x, y \in \mathbb{N}^*, x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x}$, d'où $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre total (une relation d'ordre partiel).

-Les majorants de $\{2,3\}$

M majorant de $\{2,3\} \Leftrightarrow \forall x \in \{2,3\}, x\mathcal{R}M \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mathcal{R}M \\ 3\mathcal{R}M \end{cases}$

$$\begin{cases} 2\mathcal{R}M \\ 3\mathcal{R}M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N}^*, 2^{n_1} = M \\ \exists n_2 \in \mathbb{N}^*, 3^{n_2} = M \end{cases}$$

Donc l'ensemble $\{2,3\}$ n'a pas de majorant car on a l'unicité de la décomposition en produit de facteur premier.

Exercice 3.6 :

1. L'associativité et la commutativité de cette loi $*$.

   $*$ est associative si et seulement si $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a * (b * c) = (a * b) * c$,

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= \ln(e^a + e^b) * c \\ &= \ln(e^{\ln(e^a+e^b)} + e^c) \\ &= \ln(e^a + e^b + e^c) \\ &= \ln(e^a + e^{\ln(e^b+e^c)}) \\ &= a * (\ln(e^b + e^c)) \\ &= a * (b * c) \end{aligned}$$

   D'où $*$ est associative.

   $*$ est commutative si et seulement si $\forall a, b \in \mathbb{R} : a * b = b * a$,

$$a * b = \ln(e^a + e^b) = \ln(e^b + e^a) = b * a$$

   Donc $*$ est commutative.

2. Elément neutre : $\alpha \in \mathbb{R}$ est neutre pour la loi $*$ si et seulement si $\forall a \in \mathbb{R}$:

$a * \alpha = \alpha * a = a,$

$$\begin{aligned} \alpha * a = a &\Rightarrow \ln(e^{\alpha} + e^{a}) = a \\ &\Rightarrow e^{\alpha} + e^{b} = e^{a} \\ &\Rightarrow e^{\alpha} = 0 \\ &\Rightarrow \alpha \to -\infty \notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc l'élément neutre n'existe pas.

Exercice 3.7 :

1. Montrons que $*$ est une loi de composition interne commutative et associative.

   Pour montrer que $*$ est une loi de compositions, il faut montrer que $x * y = x + y - xy \in \mathbb{R} - \{1\}$, donc il suffit de montrer que $x * y - 1 \neq 0$

$$\begin{aligned} x * y - 1 &= x + y - xy - 1 \\ &= (x-1) + y(1-x) \\ &= (x-1)(1-y) \neq 0 \quad \text{car on a} \quad x \neq 1 \quad \text{et} \quad y \neq 1 \end{aligned}$$

   D'où $*$ est une loi de composition interne.

   $*$ est commutative si et seulement si $\forall x, y \in \mathbb{R} - \{1\} : x * y = y * x,$

$$\begin{aligned} x * y &= x + y - xy \\ &= y + x - yx = y * x \end{aligned}$$

   Donc $*$ est commutative.

$*$ est associative si et seulement si $\forall x, y, z \in \mathbb{R} - \{1\} : x * (y * z) = (x * y) * z$,

$$\begin{aligned}
(x * y) * z &= (x + y - xy) * z \\
&= x + y - xy + z - (x + y - xy)z \\
&= x + y - xy + z - xz - yz + xyz \\
&= x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) \\
&= x * (y + z - yz) \\
&= x * (y * z)
\end{aligned}$$

D'où $*$ est associative.

2. Elément neutre : $e \in \mathbb{R} - \{1\}$ est neutre pour la loi $*$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} : x * e = e * x = x$,

$$\begin{aligned}
x * e = x &\Rightarrow x + e - xe = x \\
&\Rightarrow e(1 - x) = 0 \\
&\Rightarrow e = 0 \quad \text{car} \quad 1 - x \neq 0
\end{aligned}$$

Comme $*$ est commutative alors $0 * x = x$, donc 0 est l'élément neutre.

3. Element symétrique : soit e l'élément neutre pour $*$, un élément $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ admet un symétrique (inverse), s'il existe $x' \in \mathbb{R} - \{1\}$(ou x^{-1}), tel que $x * x' = x' * x = e$

$$\begin{aligned}
x * x' = 0 &\Rightarrow x + x' - xx' = 0 \\
&\Rightarrow x'(1 - x) = -x \\
&\Rightarrow x' = \tfrac{x}{x-1} \in \mathbb{R} - \{1\}
\end{aligned}$$

De plus, comme $*$ est commutative alors $x' * x = 0$, donc le symétrique de x est $x' = \frac{x}{x-1} \in \mathbb{R} - \{1\}$.
-x est régulier à gauche : pour tout $x, y, z \in \mathbb{R} - \{1\}, x * y = x * z \Rightarrow y = z$

$$\begin{aligned} x * y = x * z &\Rightarrow x + y - xy = x + z - x - z \\ &\Rightarrow y(1-x) = z(1-x) \\ &\Rightarrow y = z \end{aligned}$$

D'où, tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ est régulier.

Exercice 3.8 : Soit $(G, .)$ un groupe tel que $x^2 = x.x = e, \forall x \in G$.

$(G, .)$ groupe :
- . est associative,
- . possède un élément neutre,
- chaque élément de G admet un symétrique.

-Montrons que G est commutatif.

On a $x.x = e$ alors $x^{-1} = x$ de même $y^{-1} = y$ et $(x.y)^{-1} = xy$ or on sait que $(x.y)^{-1} = y^{-1}.x^{-1}$, alors

$$\begin{aligned} x.y &= (x.y)^{-1} \\ &= y^{-1}.x^{-1} = y.x \end{aligned}$$

donc $(.)$ est commutative, ce qui implique que G est commutatif.

Exercice 3.9 : Soit $(A, +, \times)$ un anneau de Boole tel que $x^2 = x, \forall x \in A.(x^2 = x \times x)$

1. Montrons que $(x \times y) + (y \times x) = 0; \forall x, y \in A$.

   On a $x^2 = x, y^2 = y$ et $(x+y)^2 = (x+y)$ alors

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + y^2 + x \times y + y \times x = x + y \\ &\Rightarrow x + y + x \times y + y \times x = x + y \\ &\Rightarrow -(x+y) + (x+y) + x \times y + y \times x = -(x+y) + (x+y) \\ &\Rightarrow x \times y + y \times x = 0_A \end{aligned}$$

2. En déduire que $x + x = 0_A, \forall x \in A$ et que l'anneau est commutatif.

   On a $(x \times y) + (y \times x) = 0; \forall x, y \in A.$, alors pour $y = 1$ on obtient que

$x + x = 0_A$, et donc $-x + x + x = -x + 0_A$, ce qui implique que $x = -x$
Pour montrer que l'anneau est commutatif il faut montrer que $(\times)$ est commutative (ie :$x \times y = y \times x$)
On a

$$\begin{aligned}
& x \times y + y \times x = 0_A \\
\Rightarrow\ & -(x \times y) + (x \times y) + y \times x = -(x \times y) + 0_A \\
\Rightarrow\ & y \times x = -(x \times y) \\
\Rightarrow\ & y \times x = x \times y \quad \text{car} \quad x = -x
\end{aligned}$$

Donc $(\times)$ est commutative. Ainsi A est un anneau commutatif.

3. Montrons que la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur A par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y \times x = x$ est une relation d'ordre.

$$x^2 = x \times x = x \Leftrightarrow x\mathcal{R}x$$

$\mathcal{R}$ est réflexive.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} y \times x = x \\ x \times y = y \end{cases} \\
& \Rightarrow\ x \times y + y \times x = y + x = 0_A \\
& \Rightarrow\ y + x = x + x \quad \text{car} \quad x + x = 0_A \\
& \Rightarrow\ y = x
\end{aligned}$$

$\mathcal{R}$ est antisymétrique.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y \times x = x \\ z \times y = y \end{cases} \\
&\Rightarrow (z \times y) \times (y \times x) = y \times x \\
&\Rightarrow z \times y^2 \times x = y \times x \quad \text{car} \quad \times \quad \text{est associative} \\
&\Rightarrow z \times y \times x = y \times x \quad \text{car} \quad y^2 = y \\
&\Rightarrow y \times z \times x = y \times x \quad \text{car} \quad \times \quad \text{est commutative} \\
&\Rightarrow z \times x = x \\
&\Rightarrow x\mathcal{R}z
\end{aligned}$$

$\mathcal{R}$ est transitive.

Finalement $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

4. Montrons que $x \times y \times (x+y) = 0_A, \quad \forall x, y \in A$, et en déduire qu'un anneau de Boole intègre ne peut avoir que deux éléments.

$$\begin{aligned}
x \times y \times (x+y) &= x \times y \times x + x \times y^2 \\
&= y \times x^2 + x \times y^2 \quad \text{car} \quad \times \quad \text{est commutative} \\
&= y \times x + x \times y = 0_A \quad \text{car} \quad x^2 = x, y^2 = y
\end{aligned}$$

A est un anneau de boole intègre car

$$x \times y \times (x+y) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0 \vee x + y = 0$$

$$\begin{aligned}
x + y = 0_A &\Rightarrow x + y = x + x \quad \text{car} \quad x + x = 0_A \\
&\Rightarrow y = x
\end{aligned}$$

ainsi lorsque on a choisit deux éléments de A, soit l'un des deux est nul soit ils sont égaux.

Exercice 3.10 : Soit $(E, *)$ un groupe. Un élément $x \in E$ est dit idempotent si et seulement si $x * x = x$.

1. Montrons que si x et y sont idempotents et commutent, alors $x * y$ est idempotent.

$$\begin{aligned}(x*y)*(x*y) &= x*(y*x)*y \quad \text{car} \quad * \quad \text{est associative}\\ &= x*(x*y)*y \quad \text{car} \quad x*y = y*x\\ &= (x*x)*(y*y) \quad \text{car} \quad * \quad \text{est associative}\\ &= x*y \quad \text{car} \quad x, y \quad \text{sont idempotents}\end{aligned}$$

D'où $x * y$ est idempotent.

2. Montrons que si x est idempotent, alors x^{-1} est idempotent.
$(E, *)$ un groupe alors $(x*y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$, et on a $x * x = x$ alors $(x * x)^{-1} = x^{-1}$, donc $x^{-1} * x^{-1} = x^{-1}$.
D'où x^{-1} est idempotent.

Exercice 3.11 : On munit $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de deux lois définies par :

$$(x, y) * (x', y') = (x + x', y + y') \quad et \quad (x, y)\Delta(x', y') = (xx', xy' + x'y)$$

1. Montrons que $(A, *)$ est un groupe abélien.

   (a) $*$ est associative si et seulement si $\forall (x, y), (x', y'), (x'', y'') \in A : [(x, y) * (x', y')] * (x'', y'') = (x, y) * [(x', y') * (x'', y'')]$,

   $$\begin{aligned}[(x,y)*(x',y')]*(x'',y'') &= (x+x', y+y')*(x'',y'')\\ &= (x+x'+x'', y+y'+y'')\\ &= (x,y)*(x'+x'', y'+y'')\\ &= (x,y)*[(x',y')*(x'',y'')]\end{aligned}$$

   D'où $*$ est associative.

   (b) $*$ est commutative si et seulement si $\forall (x, y), (x', y') \in A : (x, y) * (x', y') =$

$(x',y') * (x,y)$,

$$\begin{aligned}(x,y)*(x',y') &= (x+x',y+y')\\ &= (x'+x,y'+y)\\ &= (x',y')*(x,y)\end{aligned}$$

Donc $*$ est commutative.

(c) Elément neutre : $(a,b) \in A$ est neutre pour la loi $*$ si et seulement si $\forall(x,y) \in A : (x,y)*(a,b) = (a,b)*(x,y) = (x,y)$,

$$(x,y)*(a,b) = (x,y) \Rightarrow (x+a,y+b) = (x,y) \Rightarrow \begin{cases} x+a = x \\ y+b = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Puisque $*$ est commutative alors $(0,0)*(x,y) = (x,y)$, donc $(0,0)$ est l'élément neutre de A pour la loi $*$.

(d) Element symétrique : soit $(0,0)$ l'élément neutre pour $*$, un élément $(x,y) \in A$ admet un symétrique (inverse), s'il existe $(x',y') \in A$, tel que $(x,y)*(x',y') = (x',y')*(x,y) = (0,0)$, ces égalités équivalent à :

$$(x+x',y+y') = (0,0) = (x'+x,y'+y) \Leftrightarrow \begin{cases} x+x' = 0 = x'+x \\ y+y' = 0 = y'+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Donc le symétrique de (x,y) est $(-x,-y)$.

D'où $(A,*)$ est un groupe commutatif.

2. Montrons que Δ est une loi commutative et associative.

(a) Δ est associative si et seulement si $\forall(x,y),(x',y'),(x'',y'') \in A : [(x,y)\Delta$

$(x',y')]\Delta(x'',y'') = (x,y)\Delta[(x',y')\Delta(x'',y'')]$,

$$\begin{aligned}
[(x,y)\Delta(x',y')]\Delta(x'',y'') &= (xx', xy'+x'y)\Delta(x'',y'') \\
&= (xx'x'', xx'y''+x''(xy'+x'y)) \\
&= (xx'x'', xx'y''+x''xy'+x''x'y) \\
&= (x(x'x''), x(x'y''+x''y')+(x'x'')y) \\
&= (x,y)\Delta(x'x'', x'y''+x''y') \\
&= (x,y)\Delta[(x',y')\Delta(x'',y'')]
\end{aligned}$$

D'où Δ est associative.

(b) Δ est commutative si et seulement si $\forall (x,y),(x',y') \in A : (x,y)\Delta(x',y') = (x',y')\Delta(x,y)$,

$$\begin{aligned}
(x,y)\Delta(x',y') &= (xx', xy'+x'y) \\
&= (x'x, x'y+xy') \\
&= (x',y')\Delta(x,y)
\end{aligned}$$

Donc $*$ est commutative.

3. Elément neutre de A pour la loi Δ.

Elément neutre : $(e,f) \in A$ est neutre pour la loi Δ si et seulement si $\forall (x,y) \in A : (x,y)\Delta(e,f) = (e,f)\Delta(x,y) = (x,y)$,

$$\begin{aligned}
(x,y)\Delta(e,f) = (x,y) &\Rightarrow (xe, xf+ey) = (x,y) \\
&\Rightarrow \begin{cases} xe = x \\ xf+ey = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = 1 \\ f = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Puisque Δ est commutative alors $(1,0)\Delta(x,y) = (x,y)$, donc $(1,0)$ est l'élément neutre de A pour la loi Δ.

4. Montrons que $(A,*,\Delta)$ est un anneau commutatif.

Toutes les propriétés pour qu'un ensemble muni de deux loi soit un anneau sont dans les questions précédentes sauf la distributivité de la loi Δ par rapport à la loi $*$ à droite et à gauche.

Δ est distributive par rapport à $*$ si et seulement si $\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'') \in A : (x,y)\Delta[(x',y')*(x'',y'')] = ((x,y)\Delta(x',y'))*((x,y)\Delta(x'',y''))$

$$\begin{aligned}
(x,y)\Delta[(x',y')*(x'',y'')] &= (x,y)\Delta(x'+x'',y'+y'') \\
&= (x(x'+x''),x(y'+y'')+(x'+x'')y) \\
&= (xx'+xx'',xy'+xy''+x'y+x''y) \\
&= (xx',xy'+x'y)*(xx'',xy''+x''y) \\
&= [(x,y)\Delta(x',y')]*[(x,y)\Delta(x'',y'')]
\end{aligned}$$

Puisque Δ est commutative alors Δ est distributive par rapport à $*$.

Donc $(A,*,\Delta)$ est un anneau commutatif.

Exercice 3.12 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit l'application $f : (\mathbb{R}^*,\times) \to (\mathbb{R}^*,\times)$ définie par $f(x) = x^n$.

-Montrons que f est un endomorphisme du groupe $(\mathbb{R}^*,\times)$.

Pour $x,y \in \mathbb{R}^*$ on a

$$f(x \times y) = (x \times y)^n = x^n \times y^n = f(x) \times f(y)$$

D'où f est un endomorphisme de groupe $(\mathbb{R}^*,\times)$

-Le noyau de f.

L'élément neutre de $(\mathbb{R}^*,\times)$ est $e = 1$, donc

$$\begin{aligned}
Ker(f) &= \{x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 1\} = f^{-1}(\{1\}) \\
&= \{x \in \mathbb{R}^*, x^n = 1\}
\end{aligned}$$

Si n est pair alors $x = \pm 1$, donc $ker(f) = \{1,-1\}$.

Si n est impair alors $x = 1$, $ker(f) = \{1\}$.

-Image de f.

$$Im(f) = \{f(x), x \in \mathbb{R}^*\} = \{x^n, x \in \mathbb{R}^*\}$$

Si n pair alors $x^n > 0$, donc $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.

Si n impair alors $x^n \neq 0$, $Im(f) = \mathbb{R}^*$.

Exercice 3.13 : Soit $f : (G, *) \to (G', \Delta)$ un homomorphisme de groupes.

1. Montrons que $Kerf$ est un sous groupe de G.

   H est un sous groupe de G si

   -H contient au moins un élément.

   - $\forall x, y \in H, x * y^{-1} \in H$

   $$Ker(f) = \{x \in G / f(x) = e_{G'}\}$$

   (a) On sait que $f(e_G) = e_{G'}$, donc $e_G \in Ker(f)$ alors $Ker(f) \neq \emptyset$

   (b) Soient $x_1, x_2 \in Ker(f)$ alors $f(x_1) = e_{G'}$ et $f(x_2) = e_{G'}$, donc

   $$\begin{aligned} f(x_1 * x_2^{-1}) &= f(x_1)\Delta f(x_2^{-1}) \\ &= f(x_1)\Delta f(x_2)^{-1} \quad \text{car} \quad f(x_2^{-1}) = f(x_2)^{-1} \\ &= e_{G'} \quad \text{car} \quad f(x_1) = f(x_2) = e_{G'} \end{aligned}$$

   Ce qui implique que $x_1 * x_2^{-1} \in Ker(f)$.

   De (a) et (b) on en déduit que $Ker(f)$ est un sous groupe de G.

2. f est injective si et seulement si $Kerf = \{e_G\}$.

   Supposons que f est injective. Soit $x \in Ker(f)$, alors $f(x) = e_{G'}$ donc $f(x) = f(e_G)$ et comme f est injective alors $x = e_G$ donc $Ker(f) = \{e_G\}$. Réciproquement supposons que $Ker(f) = \{e_G\}$. Soient $x_1, x_2 \in G$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ donc $f(x_1)\Delta f(x_2)^{-1} = e_{G'}$, d'où $f(x_1)\Delta f(x_2^{-1}) = e_{G'}$ donc $f(x_1 * x_2^{-1}) = e_{G'}$. Ceci implique que $x_1 * x_2^{-1} \in Ker(f)$. comme $Ker(f) = \{e_G\}$ alors $x_1 * x_2^{-1} = e_G$ et donc $x_1 = x_2$ ainsi f est injective.

3. Montrons que Imf est un sous groupe de G'.

   (a) $f(e_G) = e_{G'}$, donc $e_{G'} \in Im(f)$

   (b) Soient $y, y' \in Im(f)$. Il existe $x, x' \in G$ tels que $f(x) = y, f(x') = y'$. Alors $y \Delta y' = f(x)\Delta f(x') = f(x * x') \in Im(f)$.

   (c) Soit $y \in Im(f)$ et $x \in G$ tel que $y = f(x)$. Alors $y^{-1} = f(x)^{-1} = f(x^{-1}) \in Im(f)$

   Donc $Im(f)$ est un sous groupe de G

4. f est surjective si et seulement si $Imf = G'$.
   Supposons que f est surjective alors $\forall y \in G', \exists x \in G, y = f(x) \in Im(f)$ ceci implique que $G' \subset Im(f)$ et puisque f une application (morphisme de groupe) alors $f(G) \subset G'$ alors on obtient que $Im(f) = G'$. Réciproquement $G' \subset Im(f)$ donc $\forall y \in G'$ alors $y \in Im(f) \Leftrightarrow \exists x \in G, y = f(x)$. D'où f est surjective.

3.3 Exercices supplémentaires

Exercice 3.14 : Soit f une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ telle que, quels que soient a, b et c dans E, $f(a,b) + f(b,c) + f(c,a) = 0$.
Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur E par : $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow f(a,b) = 0$ est une relation d'équivalence.

Exercice 3.15 : On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow x + y = x' + y'.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et déterminer la classe d'équivalence de $(0,0)$.

Exercice 3.16 : On définit dans $\mathbb{R}_+^*$ la relation $\mathcal{R}$ par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \ln y = y \ln x$.
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, décrire l'ensemble quotient.

Exercice 3.17 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ la relation $\mathcal{R}$ par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow n$ divise $(x - y)$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. On prend $n = 4$.
   (a) Caractériser les éléments de la classe d'équivalence de $x \in \mathbb{Z}$.
   (b) Donner les classes de $0, 1, 2, 3$. En déduire le nombre des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.

Exercice 3.18 : On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ et calculer la classe d'équivalence de 0.

Exercice 3.19 : On définit sur $\mathbb{C}$ la relation $\mathcal{R}$ par : $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ et calculer la classe d'équivalence de $\mathbb{Z}$.

Exercice 3.20 : On définit dans $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xe^y = ye^x$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence ; décrire l'ensemble quotient.

Exercice 3.21 : Soit E un ensemble et soit A une partie de E. On définit dans $P(E)$ la relation suivante : $X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow A\cup X = A\cup Y$, pour tout couple (X,Y) de parties de E.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Décrire la classe d'équivalence de $X \in P(E)$.

Exercice 3.22 : Sur $G =]-1,1[$ on définit une loi $*$ par :

$$x * y = \frac{x+y}{1+xy}; \quad \forall x,y \in G.$$

-Montrer que $(G,*)$ est un groupe abélien.

Exercice 3.23 : Soit $(G,*)$ un groupe et soit $f : G \to E$ une application bijective. On définit une loi Δ sur E par : $x\Delta y = f(f^{-1}(x) * f^{-1}(y)), \forall x,y \in E$. Montrer que (E,Δ) est un groupe.

Exercice 3.24 : Soient $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ une loi de composition interne définie sur G par :

$$(x,y) * (x',y') = (xx', xy' + y)$$

1. Montrer que $(G,*)$ est un groupe.
2. Ce groupe est-t-il abélien ?

Exercice 3.25 : Soit $(A,+,\times)$ un anneau unitaire. Soient $(a,b) \in A^2$ tels que :

$$(a\times b) + (b\times a) = 1_A \quad et \quad (a^2\times b) + (b\times a^2) = a.$$

1. Montrer que $a^2\times b = b\times a^2$ et que $2(a\times b\times a) = a$.
2. Montrer que a est inversible et que son inverse est $a+b$.

Exercice 3.26 : Soit E l'ensemble des fonctions $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ telles qu'il existe un réel $a \neq 0$ vérifiant $f(x) = x^a, \forall x \in]0,+\infty[$.

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, f est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que E muni de la loi de composition $\circ$ des fonctions est un groupe.

Chapitre 4

Examens

Examen final 2019-2020

Exercice 1 : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Exercice 2 : Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On considère les deux applications :

$$f_* \;:\; \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(F) \\ A & \longmapsto & f_*(A) = f(A) \end{array} \quad \text{et} \quad f^* \;:\; \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ B & \longmapsto & f^*(B) = f^{-1}(B) \end{array}$$

1. Montrer que :
   (a) f_* est injective si et seulement si f est injective.
   (b) f^* est surjective si et seulement si f est injective.
2. Si f est bijective, déterminer $f_* \circ f^*$ et $f^* \circ f_*$. Conclure.

Exercice 3 : On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2+d^2.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, puis déterminer la classe d'équivalence de (a,b).
2. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2/_{\mathcal{R}} \to [0,+\infty[$ définie par $f(\overline{(a,b)}) = a^2+b^2$ est bijective.

Examen final 2020-2021

Exercice 1 : Montrer par récurrence que :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

Exercice 2 : On considère deux applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par : $f(n) = 2n$ et $g(n) = E(\frac{n}{2})$. Où E est la partie entière.
Les applications sont-elles injectives, surjectives ? Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 3 : Rappelons que $(\mathbb{N}, +)$ est un monoïde commutatif (ie. + est une L.C.I sur $\mathbb{N}$ associative et admettant un élément neutre).

1. Sur l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$(m_1, m_2)\mathcal{R}(n_1, n_2) \Leftrightarrow m_1 + n_2 = n_1 + m_2, \quad \forall (m_1, m_2), (n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

   (a) Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

   (b) Déterminer $\overline{(m_1, m_2)}$: la classe d'équivalence d'un élément $(m_1, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. En déduire $\overline{(0, 0)}$.

2. On note $E = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$ et on définit sur cet ensemble quotient les deux L.C.I.
$\overline{(m_1, m_2)} \oplus \overline{(n_1, n_2)} = \overline{(m_1 + n_1, m_2 + n_2)}$
$\overline{(m_1, m_2)} \otimes \overline{(n_1, n_2)} = \overline{(m_1 n_1 + m_2 n_2, m_1 n_2 + n_1 m_2)}$.

   (a) Vérifier que $\oplus, \otimes$ sont bien définies..

   (b) Montrer que $(E, \oplus, \otimes)$ est un anneau commutatif unitaire.

   (c) Montrer que l'application

$$\begin{array}{cccc} i & : & (\mathbb{Z}, +, \times) & \longrightarrow & (E, \oplus, \otimes) \\ & & m & \longmapsto & \overline{(m, 0)} \end{array}$$

   est un homomorphisme d'anneaux unitaire injectif. En déduire 0_E.

3. Sur E, on définit la relation binaire $\mathcal{S}$ par : $\forall (m_1, m_2), (n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\overline{(m_1, m_2)}\mathcal{S}\overline{(n_1, n_2)} \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}; \overline{(m_1 + n_2, n_1 + m_2)} = \overline{(0, p)}$$

-Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre sur E.

Examen final 2021-2022

Exercice 1 : Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. où $\overline{A}$, $(\overline{B}, \overline{C})$ est le complémentaire de $A, (B, C)$ dans E.

1. Montrer que si $A \cap B = A \cap C$, alors $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.
2. Montrer que $A \subset B \Rightarrow \begin{cases} A \cap C \subset B \cap C \\ A \setminus C \subset B \setminus C \end{cases}$

Exercice 2 : Soit dans $\mathbb{R}^2$ la relation définie par :

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow (x \leq x' \quad y \leq y')$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?
2. Préciser deux majorants et deux minorants de la partie $\{(1, 2, (3, 1))\}$.

Exercice 3 : Soit h l'application de $\mathbb{R}$ Dans $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = \frac{4x}{x^2+1}$.

1. Vérifier que pour tout réel a non nul on a $h(a) = h(\frac{1}{a})$. L'application h est-elle injective ?
2. Soit f définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = h(x)$.
   (a) Montrer que f est injective.
   (b) Vérifier que : $\forall x \in I, f(x) \leq 2.$.
   (c) Montrer que f est une bijection de$I = [1, +\infty[$ sur $[0, 2]$ et trouver f^{-1}.

Exercice 4 : Soient $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ une loi de composition interne définie sur G par :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. Montrer que $(G, *)$ est un groupe.
2. Ce groupe est-t-il abélien ?

Bibliographie

[1] S. Amari, *Differential-geometrical Methods in statistics, Lecture Notes in statistics*, 28, Springer, Berlin, 1985.55.

[2] E. Azouly, J. Avignant, G. Auliac *Problèmes corrigés de mathématiques*, DEUG MIAS/SM, Edisience(Dunod pour la nouvelle édition), Paris 2002.

[3] E. Azouly, J. Avignant, G. Auliac, *Les mathématiques en licence, 1 ère. Tome 1 : Cous+ exos*, MIAS.Miass.SM, Edisience(Dunod pour la nouvelle édition), Paris 2003.

[4] E. Azouly, J. Avignant, G. Auliac, *Les mathématiques en licence, 1 ère. Tome 2 : Cous+ exos*, MIAS.Miass.SM, Edisience(Dunod pour la nouvelle édition), Paris 2003.

[5] R. Godement, *Cours d'algèbre*. Hermann, 1966.

[6] M. H. Mortad, *Exercices courigés d'algèbre, Première année L.M.D*, Edition"Dar el Bassair" (Alger-Algérie), 2012.

[7] M. Queysanne, *Algèbre*, Collection U, Armand Colin, 1971.